Matematika EP1 vizsga, 2021. jan. 8.

Kérem, hogy a dolgozat elejére írja: „Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül készítem." Majd írja ezt alá.

Az elkészített dolgozatot kérem pdf formátumban feltölteni a https://edu.epitesz.bme.hu/ oldalon a Matematika EP1 – BMETE90AX33 mappában a 2. vizsgához.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{2x+3}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

1. Az
$$\int x\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{3x-1}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

1. Az
$$\int x\sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{2x-5}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2+5x+7}{x+2}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2+3}{x-1}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{1}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Számítsuk ki az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonja által felülről határolt 0 és $\pi/2$ közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

3. Számítsuk ki az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonja által felülről határolt $\pi/2$ és π közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

3. Számítsuk ki az $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által felülről határolt 0 és $\pi/2$ közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

Számítási feladatok

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az
$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$$
mátrixon, azaz írjuk fel $A=PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2021n + n^{2021} + 2021^{1-n}}{n(2020 - n^{2020} + 2020^{-n})}$$

sorozat határértékét.

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2020n + 2021n^{2020} + 2020^{-n}}{2021 + n^{2021} + 2021^{-2n}}$$

sorozat határértékét.

6. Egy henger tetejére vele azonos sugarú félgömb illeszkedik. Az ilyen alakú $5\pi/3$ térfogatú testek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Elméleti feladatok

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (2, 0, -1)$ és $\underline{v} = (1, 2, -1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (0, -1, 2)$ és $\underline{v} = (2, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (1, -2, 0)$ és $\underline{v} = (1, -1, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

8. Az alábbi kérdésekre adott igenlő választ indokoljuk (tanult állításokra hivatkozva), nemleges válasz esetén adjunk ellenpéldát.

(a) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x)+g(x)$ függvény is folytonos x_0-ban?

(b) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $f(x)+g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy a $g(x)$ függvény is folytonos x_0-ban?

(c) Tegyük fel, hogy az $f(x)+g(x)$ függvény folytonos az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények is folytonosak x_0-ban?

9. (a) Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt az $f(x) = \sin x$ függvényre és a $[\pi/2, 3\pi/2]$ intervallumra.

   (b) Ellenőrizzük a tétel állítását a fenti esetben a következőképpen. Határozzuk meg a deriváltfüggvény értékkészletét az adott intervallumon, és következtessünk a Lagrange-tétel által garantált pont létezésére.

Minden feladat 7 pontos.