Matematika EP1 vizsga, 2021. jan. 15.

Kérem, hogy a dolgozat elejére írja: „Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül készítem.” Majd írja ezt alá.

Az elkészített dolgozatot kérem pdf formátumban feltölteni a https://edu.epitesz.bme.hu/ oldalon a Matematika EP1 – BMETE90AX33 mappában a 3. vizsgához.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{2x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{2x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{-x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{3x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{3x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{(x^2+3x+1)^{4/3}-2x-3}{\sqrt[3]{x^2+3x+1}}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^0 \frac{(x^2-5x+3)^{5/4}-2x+5}{\sqrt[4]{x^2-5x+3}}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Számítsuk ki az $x(t) = \sinh t$, $y(t) = \frac{1}{2}\sinh^2 t$, paraméteresen adott görbe (parabola) ívhosszát a $t \in [0,1]$ paramétertartományban. Segítség: az ívhossz formulájába való behelyettesítés és kiemelés után alkalmazzuk a $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ majd a $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x+1}{2}$ összefüggéseket.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$-beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy az y tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

4. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$-beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy a z tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

5. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az
$$f(x) = \begin{cases} x+a & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{3x^2-2x\sqrt{x}+5x}{2x-x^3} & \text{ha } x \in (0,1) \\ bx+1 & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$
függvény?

5. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x\sqrt[3]{x}+x+2x^3}{2x-x^2} & \text{ha } x \in (0,1) \\ bx + 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

5. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{2x^3+3x+4x\sqrt{x}}{2x+x^3} & \text{ha } x \in (0,1) \\ bx + 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

6. Írjuk fel az $f(x) = \sin^2 x/(1 - \cos x)$ függvénynek az $x_0 = \pi/2$ pontjában húzott érintőegyenesének egyenletét.

6. Írjuk fel az $f(x) = \cos^2 x/(1-\sin x)$ függvénynek az $x_0 = \pi$ pontjában húzott érintőegyenesének egyenletét.

Elméleti feladatok

7. Tekintsük a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

7. Tekintsük a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

8. Legyen

$$a_n = \frac{n^2 \sin(2n+1)}{2^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \sin x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n-re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

8. Legyen

$$a_n = \frac{n^3 \cos(1-3n)}{3^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \cos x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n-re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

9. (a) Mi a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele az x_0 pontban differenciálható $f(x)$ függvény esetén?
   (b) Mi a lokális minimum létezésének elégséges feltétele az x_0 pontban kétszer differenciálható $f(x)$ függvény esetén?
   (c) Az $f(x) = x^4$ példáján mutassuk meg, hogy a fenti elégséges feltétel nem szükséges.

Minden feladat 7 pontos.