Matematika EP1 vizsga, 2021. jan. 22.

Kérem, hogy a dolgozat elejére írja: „Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül készítem.” Majd írja ezt alá.

Az elkészített dolgozatot kérem pdf formátumban feltölteni a https://edu.epitesz.bme.hu/ oldalon a Matematika EP1 – BMETE90AX33 mappában a 4. vizsgához.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \frac{x^2-3x+3}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

1. Mennyi az
$$\int \frac{x^2-5x}{2-x}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

1. Mennyi az
$$\int \frac{8x-4x^2}{2x-3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^2 \left(\frac{e^x}{(3-e^x)^2} - 7x^6 + x - 1\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^1 \left(\sinh x\sqrt[5]{\cosh x+7} + x^{11} - 8x\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^0 \left(1+(e^x+4)^4e^x - x^6\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Tekintsük az $f(x) = 1+\sin x$ függvény grafikonjának két szomszédos zérushelye közé eső darabját. Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amelyet a fenti görbe x tengely körüli megforgatásával kapunk? Segítség: a behelyettesítés után végezzük el a négyzetre emelést, majd a kapott kifejezést tagonként integráljuk a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggés felhasználásával.

3. Tekintsük az $f(x) = 1+\cos x$ függvény grafikonjának két szomszédos zérushelye közé eső darabját. Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amelyet a fenti görbe x tengely körüli megforgatásával kapunk? Segítség: a behelyettesítés után végezzük el a négyzetre emelést, majd a kapott kifejezést tagonként integráljuk a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ összefüggés felhasználásával.

Számítási feladatok

4. Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ és $\underline{u} = (1,2,3)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

4. Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ és $\underline{u} = (3,2,1)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{3 - 8n + n^2}{5n + 2n^2 + 1} \right)^{3n-4}$$

sorozat határértéke?

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{5 + 3n - 2n^2}{4 - n^2} \right)^{n+5}$$

sorozat határértéke?

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{1 + 3n + n^2}{n^2 - 4} \right)^{1-n}$$

sorozat határértéke?

Elméleti feladatok

7. (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.
   (b) Határozzuk meg a $2x - 3y + z = 5$ és $-4x + 6y - 2z = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

7. (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.
   (b) Határozzuk meg a $x + 2y - 2z = 3$ és $-2x - 4y + 4z + 6 = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

8. Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sin(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$-ban. Értelmezzük az

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}, \qquad \widetilde{x}_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + n2n}$$

sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} x_n$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\widetilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0-beli határértékének létezésére.

8. Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$-ban. Értelmezzük az

$$x_n = \frac{1}{n2\pi}, \qquad \widetilde{x}_n = \frac{1}{\pi + n2n}$$

sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} x_n$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\widetilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0-beli határértékének létezésére.

9. Alkalmazható-e a Rolle-féle középértéktétel a $[0,1]$ intervallumon az alábbi függvényekre? Ha igen, mutassunk olyan pontot a $[0,1]$ intervallumban, amelyben az adott függvény rendelkezik a tétel által garantált tulajdonsággal. Ha nem, adjuk meg, hogy a tétel melyik feltétele sérül.

   - $f(x) = 1 - x$;
   - $g(x) = \sin(\pi x)$;
   - $h(x) = \cos(\pi x)$;
   - $i(x) = \mathrm{tg}(\pi x)$;
   - $j(x) = 0$;
   - $k(x) = (x-3)(x+2)$;
   - $l(x) = |1 - 2x|$.

Minden feladat 7 pontos.