Matematika EP1 vizsga megoldása, 2020. dec. 21.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2+1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int \frac{4x^2+1}{2x-1}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(2x+1+\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} x^2+x+\ln|2x-1|+c.$$

1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2-x-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int \frac{4x^2-x-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(2x-\frac{3}{2}+\frac{1/2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\ln|2x+1|+c.$$

1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2+2x-2}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int \frac{4x^2+2x-2}{2x+3}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(2x-2+\frac{4}{2x+3}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} x^2-2x+2\ln|2x+3|+c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{3x+2x^{-1/2}}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás:
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2x^{3/2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\pi^{3/2}\left(\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{1}{8}\right) \quad 2p$$
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2x^{-1/2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\ln|x|]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\left(\ln\frac{\pi}{3}-\ln\frac{\pi}{4}\right) = 4\ln 2-2\ln 3 \quad 2p$$
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} -\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\cos x}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \sqrt{2}-2^{3/4} \quad 3p$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{2x-3x^{-1}}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás:
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{4\pi^{3/2}}{3^{5/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right) \quad 2p$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{-3x^{-1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[6x^{-1/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1) \quad 2p$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} -\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = [\ln|\cos x|]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 3 \quad 3p$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{2x\sqrt{x}-3}{x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x$$

határozott integrált.

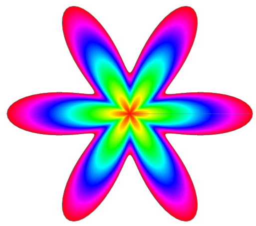
Megoldás:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2x\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{4\pi^{3/2}}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right) \quad 2p$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{-3}{x}\,\mathrm{d}x = [-3\ln|x|]_{\pi/6}^{\pi/4} = 3\left(\ln\frac{\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{6}\right) = 3\ln\frac{3}{2} \quad 2p$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\cos x}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = 2-\sqrt{2} \quad 3p$$

3. Karácsonyra az ábrán látható csillag alakú mézeskalácsot készítjük el, amelyet színes szórócukorral díszítünk. A csillag körvonalát centiméterben az $r(\varphi) = 2+\sin(6\varphi)$ polárkoordinátás összefüggés adja meg, ahol $\varphi \in [0, 2\pi]$. Mekkora a karácsonyi csillag területe?
Segítség: a képletgyűjteményben szereplő integrálformula integrandusában végezzük el a négyzetre emelést, és az integrálást tagonként végezzük el felhasználva a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggést.



Megoldás:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &\overset{2p}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2+\sin 6\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{1p}{=} \int_0^{2\pi} \left(2+2\sin 6\varphi + \frac{\sin^2 6\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{1p}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4}+2\sin 6\varphi - \frac{\cos 12\varphi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{2p}{=} \left[\frac{9}{4}\varphi - \frac{\cos 6\varphi}{3} - \frac{\sin 12\varphi}{48}\right]_0^{2\pi} \\
&\overset{1p}{=} \frac{9\pi}{2}
\end{aligned}$$

ahol a behelyettesítéskor érdemes használni a fellépő trigonometrikus függvények periodikusságát.

Számítási feladatok

4. Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned}
x-3y+2z&=1\\
2x-5y+7z&=5\\
-2x+8y+az&=b
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire nincs az egyenletrendszernek megoldása? A választ indokoljuk.

Megoldás: Lépcsős alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & b-4 \end{array}\right] \quad 4p$$

Akkor nincs megoldás, ha $a-2=0$, azaz $a=2$, de $b-4\neq 0$, azaz $b\neq 4$, mert ilyenkor az utolsó sor önellentmondó. 3p

4. Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned}
x-3y+2z&=1\\
2x-5y+7z&=5\\
-2x+8y+az&=b
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása? A megoldást nem kell kiszámolni. A választ indokoljuk.

Megoldás: Lépcsős alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & b-4 \end{array}\right] \quad 4p$$

Akkor van pontosan egy megoldás, ha $a-2 \neq 0$, azaz $a \neq 2$, mert ilyenkor minden oszlopba jut vezéregyes. 3p

4. Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + 7z &= 5 \\ -2x + 8y + az &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása? A megoldásokat nem kell kiszámolni. A választ indokoljuk.

Megoldás: Lépcsős alak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & b-4 \end{array}\right] \quad 4p$$

Akkor van pontosan végtelen sok megoldás, ha $a-2 = 0$, azaz $a = 2$ és $b-4 = 0$, azaz $b = 4$, mert ilyenkor az utolsó sor csupa 0-t tartalmaz, így nincs önellentmondó sor, de nem jut minden oszlopba vezéregyes. 3p

5. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(2x - \pi)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2}$$

függvényhatárértéket.

Megoldás: $w = x - \pi/2$ változócserével

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(2x - \pi)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2} \overset{3p}{=} \lim_{w \to 0} \frac{\sin 2w}{\ln\left(\frac{w+\pi/2}{\pi/2}\right)} \overset{2p}{=} \lim_{w \to 0} \frac{\sin 2w}{w} \frac{w}{\ln\left(1 + \frac{w}{\pi/2}\right)} \overset{2p}{=} 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

5. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \to -\pi/2} \frac{\sin(x + \pi/2)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2}$$

függvényhatárértéket.

Megoldás: $w = x + \pi/2$ változócserével

$$\lim_{x \to -\pi/2} \frac{\sin(x + \pi/2)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2} \overset{3p}{=} \lim_{w \to 0} \frac{\sin w}{\ln\left(\frac{\pi/2 - w}{\pi/2}\right)} \overset{2p}{=} \lim_{w \to 0} \frac{\sin w}{w} \frac{w}{\ln\left(1 - \frac{w}{\pi/2}\right)} \overset{2p}{=} 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (2-x)e^{3x-4}$ függvény $x_0 = 2$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

Megoldás: $f(2) = 0$ 1p, $f'(x) = (5-3x)e^{3x-6}$ 3p, $f'(2) = -e^2$ 1p, érintőre merőleges egyenes meredeksége e^{-2} 1p. Keresett egyenes: $y = e^{-2}(x-2)$ 1p.

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (x-3)e^{2x-7}$ függvény $x_0 = 4$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

Megoldás: $f(4) = e$ 1p, $f'(x) = (2x-5)e^{2x-7}$ 3p, $f'(4) = 3e$ 1p, érintőre merőleges egyenes meredeksége $-1/(3e)$ 1p. Keresett egyenes: $y - e = -\frac{1}{3e}(x-4)$ 1p.

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (x+1)e^{3-2x}$ függvény $x_0 = 1$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

Megoldás: $f(1) = 2e$ 1p, $f'(x) = (-2x-1)e^{3-2x}$ 3p, $f'(1) = -3e$ 1p, érintőre merőleges egyenes meredeksége $1/(3e)$ 1p. Keresett egyenes: $y - 2e = \frac{1}{3e}(x-1)$ 1p.

Elméleti feladatok

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknek a két koordinátája egymás ellentettje? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

   Megoldás: Az adott vektorhalmaz az $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, amely egy origón átmenő -1 meredekségű egyenesként ábrázolható. A halmaz alteret alkot, mert ilyen vektorok összege, konstansszorosa is a halmazban van. Ponthalmaz helyes meghatározása vagy ábrázolása 2p.

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknél a két koordináta abszolút értéke egymással egyenlő? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

   Megoldás: Az adott vektorhalmaz végpontjai két origón átmenő egyenes unióját alkotják, melyek meredeksége 1 és -1. Nem alkotnak alteret, mert pl. $(1, 1)$ és $(1, -1)$ is a halmazban van, de az összegük $(2, 0)$ nem. Ponthalmaz helyes meghatározása vagy ábrázolása 2p.

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknek x koordinátája megegyezik az y koordináta négyzetével? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

   Megoldás: Az adott vektorhalmaz végpontjai egy origón átmenő vízszintes szimmetriatengelyű parabolát alkotnak. Nem alkot alteret, mert pl. $(1, 1)$ és $(4, 2)$ is a halmazban van, de az összegük $(5, 3)$ nem. Ponthalmaz helyes meghatározása vagy ábrázolása 2p.

8. Állapítsuk meg az
$$a_n = \frac{2n+1}{n-1}$$
   sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 2p, továbbá $\left|\frac{2n+1}{n-1} - 2\right| = \frac{3}{n-1} < \varepsilon$ 3p, ha $n > \frac{3}{\varepsilon} + 1$ 1p (ezt nem kell általános ε-nal kifejezni), ezért küszöbindexnek $n_0 = 32$ választható 1p (nem kell a legkisebb küszöbindexet megadni).

8. Állapítsuk meg az
$$a_n = \frac{n-1}{3n+6}$$
   sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$ 2p, továbbá $\left|\frac{n-1}{3n+6} - \frac{1}{3}\right| = \frac{3}{3n+6} = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$ 3p, ha $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$ 1p (ezt nem kell általános ε-nal kifejezni), ezért küszöbindexnek $n_0 = 9$ választható 1p (nem kell a legkisebb küszöbindexet megadni).

8. Állapítsuk meg az
$$a_n = \frac{n-5}{2n+2}$$
   sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$ 2p, továbbá $\left|\frac{n-5}{2n+2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{6}{2n+2} = \frac{3}{n+1} < \varepsilon$ 3p, ha $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$ 1p (ezt nem kell általános ε-nal kifejezni), ezért küszöbindexnek $n_0 = 30$ választható 1p (nem kell a legkisebb küszöbindexet megadni).

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az
$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$$
   végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

   Megoldás:
$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty} \int_2^K \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty} [\ln \ln x]_2^K = \lim_{K\to\infty} (\ln \ln K - \ln \ln 2) \overset{1p}{=} \infty.$$

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$$

végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

Megoldás:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty}\int_2^K \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^K = \lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln K}\right) \overset{1p}{=} \frac{1}{\ln 2}.$$

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$$

végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

Megoldás:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty}\int_2^K \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \lim_{K\to\infty}\left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^K = \lim_{K\to\infty}\left(2\sqrt{\ln K}-2\sqrt{\ln 2}\right) \overset{1p}{=} \infty.$$