Matematika EP1 vizsga megoldása, 2021. jan. 8.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az

$$\int x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{2x+3}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ 2p és $x=\frac{u^2-3}{2}$ 1p, ezért

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \int x(2x+3)\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{2p}{=} \int \frac{u^2-3}{2}u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \int\left(\frac{1}{2}u^4-\frac{3}{2}u^2\right)\mathrm{d}u\\ &\overset{1p}{=} \frac{u^5}{10}-\frac{u^3}{2}+c\\ &\overset{1p}{=} \frac{(2x+3)^{5/2}}{10}-\frac{(2x+3)^{3/2}}{2}+c.\end{aligned}$$

1. Az

$$\int x\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{3x-1}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ 2p és $x=\frac{u^2+1}{3}$ 1p, ezért

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int x(3x-1)\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{2p}{=} \frac{2}{3}\int \frac{u^2+1}{3}u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \int\left(\frac{2}{9}u^4+\frac{2}{9}u^2\right)\mathrm{d}u\\ &\overset{1p}{=} \frac{2u^5}{45}+\frac{2u^3}{27}+c\\ &\overset{1p}{=} \frac{2(3x-1)^{5/2}}{45}+\frac{2(3x-1)^{3/2}}{27}+c.\end{aligned}$$

1. Az

$$\int x\sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{2x-5}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$ 2p és $x=\frac{u^2+5}{2}$ 1p, ezért

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x &= \int x(2x-5)\frac{1}{\sqrt{2x-5}}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{2p}{=} \int \frac{u^2+5}{2}u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \int\left(\frac{1}{2}u^4+\frac{5}{2}u^2\right)\mathrm{d}u\\ &\overset{1p}{=} \frac{u^5}{10}+\frac{5u^3}{6}+c\\ &\overset{1p}{=} \frac{(2x-5)^{5/2}}{10}+\frac{5(2x-5)^{3/2}}{6}+c.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+5x+7}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x^2+5x+7}{x+2}\,\mathrm{d}x &\overset{3p}{=} \int_{-1}^{1} \left(x+3+\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{2p}{=} \left[\frac{x^2}{2}+3x+\ln|x+2|\right]_{-1}^{1} \\ &\overset{2p}{=} \frac{1}{2}+3+\ln 3-\left(\frac{1}{2}-3+\ln 1\right) \\ &= 6+\ln 3.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+3}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x^2+3}{x-1}\,\mathrm{d}x &\overset{3p}{=} \int_{-1}^{0} \left(x+1+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{2p}{=} \left[\frac{x^2}{2}+x+4\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} \\ &\overset{2p}{=} 0+0+4\ln 1-\left(\frac{1}{2}-1+4\ln 2\right) \\ &= \frac{1}{2}-4\ln 2.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_{1}^{2} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &\overset{3p}{=} \int_{1}^{2} \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{2p}{=} \left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]_{1}^{2} \\ &\overset{2p}{=} 2-2+\ln 3-\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right) \\ &= \frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2.\end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonja által felülről határolt 0 és $\pi/2$ közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

Megoldás:

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = 1. \quad 2p$$

Parciális integrálással

$$\int_{0}^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} [x(-\cos x)]_0^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2} 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = 0+[\sin x]_0^{\pi/2} = 1-0 = 1. \quad 1p$$

Alkalmazva a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggést

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \quad 2p$$

A tömegközéppont koordinátái $(1, \pi/8)$.

3. Számítsuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja által felülről határolt $\pi/2$ és π közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

   Megoldás:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 = 1. \quad 2p$$

   Parciális integrálással

$$\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} [x(-\cos x)]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot (-\cos x) \,\mathrm{d}x = \pi + [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = \pi + 0 - 1 = \pi - 1. \quad 1p$$

   Alkalmazva a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggést

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad 2p$$

   A tömegközéppont koordinátái $(\pi - 1, \pi/8)$.

3. Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által felülről határolt 0 és $\pi/2$ közé eső síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: a szükséges integrálok kiszámításához alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét ill. használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést a trigonometrikus függvények négyzetére.

   Megoldás:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1. \quad 2p$$

   Parciális integrálással

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \quad 1p$$

   Alkalmazva a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ összefüggést

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \quad 2p$$

   A tömegközéppont koordinátái $(\pi/2 - 1, \pi/8)$.

Számítási feladatok

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

   Megoldás: Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -5$ 1p. A hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1p és $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1p. Így a keresett mátrixok:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ 1p \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \ 1p \qquad P^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \ 1p$$

   amelyekkel

$$A^{10} = PD^{10}P^T \overset{1p}{=} P \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} P^T = 5^{10} PIP^T = 5^{10} I.$$

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

Megoldás: Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -5$ 1p. A hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1p és $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1p. Így a keresett mátrixok:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad P^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ 1p}$$

amelyekkel

$$A^{10} = PD^{10}P^T \overset{1p}{=} P\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}P^T = 5^{10}PIP^T = 5^{10}I.$$

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

Megoldás: Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -5$ 1p. A hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1p és $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1p. Így a keresett mátrixok:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad P^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 1p}$$

amelyekkel

$$A^{10} = PD^{10}P^T \overset{1p}{=} P\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}P^T = 5^{10}PIP^T = 5^{10}I.$$

4. Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

Megoldás: Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -5$ 1p. A hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1p és $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1p. Így a keresett mátrixok:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ 1p} \qquad P^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 1p}$$

amelyekkel

$$A^{10} = PD^{10}P^T \overset{1p}{=} P\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}P^T = 5^{10}PIP^T = 5^{10}I.$$

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2021n + n^{2021} + 2021^{1-n}}{n(2020 - n^{2020} + 2020^{-n})}$$

sorozat határértékét.

Megoldás:

$$a_n = \frac{2021n + n^{2021} + 2021^{1-n}}{n(2020 - n^{2020} + 2020^{-n})} \overset{4p}{=} \frac{n^{2021}\left(\frac{2021}{n^{2020}} + 1 + \frac{2021}{2021^n n^{2021}}\right)}{n^{2021}\left(\frac{2020}{n^{2020}} - 1 + \frac{1}{2020^n n^{2020}}\right)} \overset{3p}{\to} -1.$$

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2020n + 2021n^{2020} + 2020^{-n}}{2021 + n^{2021} + 2021^{-2n}}$$

sorozat határértékét.

Megoldás:

$$a_n = \frac{2020n + 2021n^{2020} + 2020^{-n}}{2021 + n^{2021} + 2021^{-2n}} \overset{4p}{=} \frac{n^{2020}(\frac{2020}{n^{2019}} + 2021 + \frac{1}{2020^n n^{2020}})}{n^{2021}(\frac{2021}{n^{2021}} + 1 + \frac{1}{2021^{2n} n^{2021}})} \overset{3p}{\to} 0.$$

6. Egy henger tetejére vele azonos sugarú félgömb illeszkedik. Az ilyen alakú $5\pi/3$ térfogatú testek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

Megoldás: Az r sugarú és m magasságú henger és rá illeszkedő félgömb esetén a térfogat $r^2\pi m + 2t^3\pi/3 = 5\pi/3$ 1p a feladat szöveges szerint. Ebből $m = 5/(3r^2) - 2r/3$ 1p. A minimalizálandó felszín $r^2\pi + 2r\pi m + 4r^2\pi/2 = 3r^2\pi + 2r\pi m$. Ebbe az m-re kapott összefüggést beírva $f(r) = 3r^2\pi + 2r\pi(5/(3r^2) - 2r/3) = 5r^2\pi/3 + 10\pi/(3r)$ 1p adódik. Ennek deriváltja $f'(r) = 10r\pi/3 - 10\pi/(3r^2)$ 2p, amely pontosan akkor 0, ha $r = 1$ 1p. Innen $m = 1$. A második derivált $f''(r) = 10\pi/3 + 20\pi/(3r^3)$, amely biztosan pozitív minden $r > 0$-ra, ezért az $r = 1$ valóban minimum 1p.

Elméleti feladatok

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (2, 0, -1)$ és $\underline{v} = (1, 2, -1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

   Megoldás:

   (a)

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} 2p$$

   (b) $\langle \underline{u}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$, $\langle \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$ 1p.
   (c) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{6}$, ahonnan $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{30}}$ 1p, ahol α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szöge. Innen $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{21}{30}}$ 1p.
   (d) $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \sqrt{21}$ 1p. Másrészt $\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha = \sqrt{21}$ 1p.

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (0, -1, 2)$ és $\underline{v} = (2, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

   Megoldás:

   (a)

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} 2p$$

   (b) $\langle \underline{u}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$, $\langle \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$ 1p.
   (c) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{6}$, ahonnan $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{30}}$ 1p, ahol α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szöge. Innen $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{21}{30}}$ 1p.
   (d) $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \sqrt{21}$ 1p. Másrészt $\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha = \sqrt{21}$ 1p.

7. (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (1, -2, 0)$ és $\underline{v} = (1, -1, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
   (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszát.
   (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

   Megoldás:

   (a)
$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ 2p$$

   (b) $\langle \underline{u}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$, $\langle \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 0$ 1p.
   (c) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{6}$, ahonnan $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{30}}$ 1p, ahol α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szöge. Innen $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{21}{30}}$ 1p.
   (d) $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \sqrt{21}$ 1p. Másrészt $\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha = \sqrt{21}$ 1p.

8. Az alábbi kérdésekre adott igenlő választ indokoljuk (tanult állításokra hivatkozva), nemleges válasz esetén adjunk ellenpéldát.
   (a) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x) + g(x)$ függvény is folytonos x_0-ban?
   (b) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $f(x) + g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy a $g(x)$ függvény is folytonos x_0-ban?
   (c) Tegyük fel, hogy az $f(x) + g(x)$ függvény folytonos az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények is folytonosak x_0-ban?

   Megoldás:

   (a) Igen, következik. Tanultuk, hogy folytonos függvények összege folytonos. 2p
   (b) Igen, következik. Tanultuk, hogy folytonos függvények különbsége folytonos, $g(x)$ pedig előáll $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ alakban, ahol $f(x) + g(x)$ és $f(x)$ folytonosak. 2p
   (c) Nem következik. Ellenpéldának válasszuk az $f(x)+g(x)$-et tetszőleges folytonos függvénynek x_0-ban, $f(x)$-et pedig tetszőleges x_0-ban nem folytonos függvénynek. Például legyen $f(x) + g(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ és $f(x) = 0$, ha $x < x_0$, ill. $f(x) = 1$, ha $x \geq x_0$. Ekkor $g(x) = 0$, ha $x < x_0$, ill. $g(x) = -1$, ha $x \geq x_0$. 3p

9. (a) Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt az $f(x) = \sin x$ függvényre és a $[\pi/2, 3\pi/2]$ intervallumra.
   (b) Ellenőrizzük a tétel állítását a fenti esetben a következőképpen. Határozzuk meg a deriváltfüggvény értékkészletét az adott intervallumon, és következtessünk a Lagrange-tétel által garantált pont létezésére.

   Megoldás:

   (a) Létezik olyan $c \in (\pi/2, 3\pi/2)$ 1p, hogy $f'(c) = \cos c = \frac{f(3\pi/2) - f(\pi/2)}{3\pi/2 - \pi/2} = -\frac{2}{\pi}$ 3p.
   (b) Mivel $f'(x) = \cos x$ az $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ értékkészlete a $[-1, 0]$ intervallum 1p, és $-2/\pi$ ennek az intervallumnak a belsejébe esik 1p, ezért lesz olyan $c \in (\pi/2, 3\pi/2)$, amelyre $\cos c = -2/\pi$ 1p. Ez a zárt intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó tétel miatt igaz.