Matematika EP1 vizsga megoldása, 2021. jan. 15.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{2x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{2x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

Megoldás: Mivel $(e^{2x^2})' = e^{2x^2}4x$ 2p, ezért
$$\int x^3 e^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}x^2 4xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \frac{1}{4}x^2e^{2x^2} - \int \frac{1}{2}xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} \frac{1}{4}x^2e^{2x^2} - \frac{1}{8}e^{2x^2} + c.$$

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{-x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

Megoldás: Mivel $(e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-2x)$ 2p, ezért
$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}x^2(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \int -xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

1. Végezzünk parciális integrálást az
$$\int x^3 e^{3x^2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban. Először számoljuk ki az e^{3x^2} exponenciális tényező deriváltját, majd ezt a deriváltfüggvényt válasszuk a parciális integrálásban az $f'(x)$ függvénynek.

Megoldás: Mivel $(e^{3x^2})' = e^{3x^2}6x$ 2p, ezért
$$\int x^3 e^{3x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}x^2 6xe^{3x^2}\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \frac{1}{6}x^2e^{3x^2} - \int \frac{1}{3}xe^{3x^2}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} \frac{1}{6}x^2e^{3x^2} - \frac{1}{18}e^{3x^2} + c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{(x^2+3x+1)^{4/3} - 2x - 3}{\sqrt[3]{x^2+3x+1}}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás:
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(x^2+3x+1)^{4/3} - 2x - 3}{\sqrt[3]{x^2+3x+1}}\,\mathrm{d}x &\overset{2p}{=} \int_0^1 \Big(x^2+3x+1-(x^2+3x+1)^{-1/3}(2x+3)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{2+2p}{=} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}(x^2+3x+1)^{2/3}\right]_0^1 \\
&\overset{1p}{=} \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2}5^{2/3} - \left(0 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{13}{3} - \frac{3}{2}5^{2/3}.
\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^0 \frac{(x^2-5x+3)^{5/4} - 2x + 5}{\sqrt[4]{x^2-5x+3}}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás:

$$\int_{-1}^{0} \frac{(x^2-5x+3)^{5/4}-2x+5}{\sqrt[4]{x^2-5x+3}}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} \int_{-1}^{0}\left(x^2-5x+3-(x^2-5x+3)^{-1/4}(2x-5)\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{2+2p}{=} \left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+3x-\frac{4}{3}(x^2-5x+3)^{3/4}\right]_{-1}^{0}$$
$$\overset{1p}{=} 0-\frac{4}{3}3^{3/4}-\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-3-\frac{4}{3}9^{3/4}\right)$$
$$=\frac{35}{6}+\frac{4}{3}(9^{3/4}-3^{3/4}).$$

3. Számítsuk ki az $x(t)=\sinh t$, $y(t)=\frac{1}{2}\sinh^2 t$, paraméteresen adott görbe (parabola) ívhosszát a $t\in[0,1]$ paramétertartományban. Segítség: az ívhossz formulájába való behelyettesítés és kiemelés után alkalmazzuk a $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ majd a $\cosh^2 x=\frac{\cosh 2x+1}{2}$ összefüggéseket.

   Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\cosh t$ 1p, $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\sinh t\cosh t$ 1p, ezért az ívhossz 1p

$$\int_0^1\sqrt{\cosh^2 t+(\sinh t\cosh t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sqrt{\cosh^2 t(1+\sinh^2 t)}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{1p}{=}\int_0^1\sqrt{\cosh^2 t\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\cosh^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{1p}{=}\int_0^1\frac{\cosh 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{1p}{=}\left[\frac{\sinh 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^1$$
$$\overset{1p}{=}\frac{\sinh 2}{4}+\frac{1}{2}.$$

Számítási feladatok

4. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$-beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy az y tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

   Megoldás:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\ 3p,\qquad \det A=1\ 1p,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\ 2p$$

   A^{-1} azon x tengely körüli $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixa, amely a z tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi. 1p

4. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$-beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy a z tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

   Megoldás:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\ 3p,\qquad \det A=1\ 1p,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\ 2p$$

   A^{-1} azon x tengely körüli $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixa, amely az y tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe viszi. 1p

5. Az $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{ha } x\le 0\\ \frac{3x^2-2x\sqrt{x}+5x}{2x-x^3} & \text{ha } x\in(0,1)\\ bx+1 & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$$

függvény?

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x\sqrt{x}+5x}{2x-x^3}=\frac{5}{2}\ \textcolor{red}{3p},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x\sqrt{x}+5x}{2x-x^3}=6\ \textcolor{red}{2p},$$

ezért $a=5/2$ 1p és $b=5$ 1p.

5. Az $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{ha } x\le 0\\ \frac{x\sqrt[3]{x}+x+2x^3}{2x-x^2} & \text{ha } x\in(0,1)\\ bx+1 & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$$

függvény?

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{x}+x+2x^3}{2x-x^2}=\frac{1}{2}\ \textcolor{red}{3p},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt[3]{x}+x+2x^3}{2x-x^2}=4\ \textcolor{red}{2p},$$

ezért $a=1/2$ 1p és $b=3$ 1p.

5. Az $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{ha } x\le 0\\ \frac{2x^3+3x+4x\sqrt{x}}{2x+x^3} & \text{ha } x\in(0,1)\\ bx+1 & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$$

függvény?

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x+4x\sqrt{x}}{2x+x^3}=\frac{3}{2}\ \textcolor{red}{3p},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x+4x\sqrt{x}}{2x+x^3}=3\ \textcolor{red}{2p},$$

ezért $a=3/2$ 1p és $b=2$ 1p.

6. Írjuk fel az $f(x)=\sin^2 x/(1-\cos x)$ függvénynek az $x_0=\pi/2$ pontjában húzott érintőegyenesének egyenletét.

Megoldás:

$$f'(x)=\frac{2\sin x\cos x(1-\cos x)-\sin^2 x\sin x}{(1-\cos x)^2}\ \textcolor{red}{3p}$$

$f'(\pi/2)=-1$ 2p, $f(\pi/2)=1$ 1p, ezért az érintő egyenlete $y-1=-(x-\pi/2)$ 1p.

6. Írjuk fel az $f(x)=\cos^2 x/(1-\sin x)$ függvénynek az $x_0=\pi$ pontjában húzott érintőegyenesének egyenletét.

Megoldás:

$$f'(x)=\frac{2\cos x(-\sin x)(1-\sin x)-\cos^2 x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\ \textcolor{red}{3p}$$

$f'(\pi)=-1$ 2p, $f(\pi)=1$ 1p, ezért az érintő egyenlete $y-1=-(x-\pi)$ 1p.

Elméleti feladatok

7. Tekintsük a

$$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\quad \underline{v}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix},\quad \underline{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix},\quad \underline{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\lambda_3\underline{v}_3=\underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 2 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 &= -1 \qquad 3p \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Akkor van pontosan egy megoldás, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. 2p Ebben az esetben

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0, \; 1p$$

ezért a megoldás egyértelmű. Az egyértelműség nem függ az $\underline{u}$ vektortól. 1p

7. Tekintsük a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

Megoldás:

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 2 \qquad 3p \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Akkor van pontosan egy megoldás, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. 2p Ebben az esetben

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0, \; 1p$$

ezért a megoldás egyértelmű. Az egyértelműség nem függ az $\underline{u}$ vektortól. 1p

8. Legyen

$$a_n = \frac{n^2 \sin(2n+1)}{2^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \sin x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n-re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

Megoldás: Alsó becslés $b_n = -n^2/2^n$, 2p felső becslés $c_n = n^2/2^n$, 2p azaz $b_n \leq a_n \leq c_n$ minden n-re. Továbbá $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, 2p ezért a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 1p.

8. Legyen

$$a_n = \frac{n^3 \cos(1-3n)}{3^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \cos x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n-re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

Megoldás: Alsó becslés $b_n = -n^3/3^n$, 2p felső becslés $c_n = n^3/3^n$, 2p azaz $b_n \leq a_n \leq c_n$ minden n-re. Továbbá $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, 2p ezért a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 1p.

9. (a) Mi a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele az x_0 pontban differenciálható $f(x)$ függvény esetén?

(b) Mi a lokális minimum létezésének elégséges feltétele az x_0 pontban kétszer differenciálható $f(x)$ függvény esetén?

(c) Az $f(x) = x^4$ példáján mutassuk meg, hogy a fenti elégséges feltétel nem szükséges.

Megoldás:

(a) $f'(x_0) = 0$. 2p

(b) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$. 2p

(c) Ha $f(x) = x^4$, akkor $f''(x) = 12x^2$, amelyre $x_0 = 0$-ban $f''(0) = 0$, mégis lokális (és globális) minimuma van $x_0 = 0$-ban. 3p