Matematika EP1 vizsga megoldása, 2021. jan. 22.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az

$$\int \frac{x^2-3x+3}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással

$$\int \frac{x^2-3x+3}{1-x}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(-x+2+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} -\frac{x^2}{2}+2x-\ln|1-x|+c.$$

1. Mennyi az

$$\int \frac{x^2-5x}{2-x}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással

$$\int \frac{x^2-5x}{2-x}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(-x+3-\frac{6}{2-x}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} -\frac{x^2}{2}+3x+6\ln|2-x|+c.$$

1. Mennyi az

$$\int \frac{8x-4x^2}{2x-3}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással

$$\int \frac{8x-4x^2}{2x-3}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(-2x+1+\frac{3}{2x-3}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} -x^2+x+\frac{3}{2}\ln|2x-3|+c.$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_0^2 \left(\frac{e^x}{(3-e^x)^2}-7x^6+x-1\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\frac{e^x}{(3-e^x)^2}-7x^6+x-1\right)\mathrm{d}x &\overset{3+2p}{=} \left[-(3-e^x)^{-1}-x^7+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2\\ &\overset{2p}{=} -\frac{1}{3-e^2}-128+2-2+\frac{1}{3-2}+0\\ &= -\frac{255}{2}-\frac{1}{3-e^2}.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^1 \left(\sinh x\sqrt[5]{\cosh x+7}+x^{11}-8x\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(\sinh x\sqrt[5]{\cosh x+7}+x^{11}-8x\right)\mathrm{d}x &\overset{3+2p}{=} \left[\frac{5}{6}(\cosh x+7)^{6/5}+\frac{x^{12}}{12}-4x^2\right]_{-1}^1\\ &\overset{2p}{=} \frac{5}{6}(\cosh 1+7)^{6/5}+\frac{1}{12}-4-\left(\frac{5}{6}(\cosh(-1)+7)^{6/5}+\frac{1}{12}-4\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{0} \left(1 + (e^x + 4)^4 e^x - x^6\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás:
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \left(1 + (e^x + 4)^4 e^x - x^6\right) \mathrm{d}x &\overset{3+2p}{=} \left[x + \frac{(e^x+4)^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{0} \\
&\overset{2p}{=} 0 + \frac{(1+4)^5}{5} - 0 - \left(-1 + \frac{(e^{-1}+4)^5}{5} + \frac{1}{7}\right) \\
&= 626 - \frac{1}{7} - \frac{(e^{-1}+4)^5}{5}.
\end{aligned}$$

3. Tekintsük az $f(x) = 1+\sin x$ függvény grafikonjának két szomszédos zérushelye közé eső darabját. Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amelyet a fenti görbe x tengely körüli megforgatásával kapunk? Segítség: a behelyettesítés után végezzük el a négyzetre emelést, majd a kapott kifejezést tagonként integráljuk a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggés felhasználásával.

Megoldás: Két szomszédos zérushely $-\pi/2$ és $3\pi/2$, 2p ezért 1p
$$\begin{aligned}
\pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (1+\sin x)^2 \,\mathrm{d}x &\overset{1p}{=} \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(1 + 2\sin x + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{2p}{=} \pi \left[\frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi/2}^{3\pi/2} \\
&\overset{1p}{=} \pi \left(\frac{9}{4}\pi - 0 - 0 - \left(-\frac{3}{4}\pi - 0 - 0\right)\right) \\
&= 3\pi^2.
\end{aligned}$$

3. Tekintsük az $f(x) = 1+\cos x$ függvény grafikonjának két szomszédos zérushelye közé eső darabját. Mennyi annak a forgástestnek a térfogata, amelyet a fenti görbe x tengely körüli megforgatásával kapunk? Segítség: a behelyettesítés után végezzük el a négyzetre emelést, majd a kapott kifejezést tagonként integráljuk a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ összefüggés felhasználásával.

Megoldás: Két szomszédos zérushely $-\pi$ és π, 2p ezért 1p
$$\begin{aligned}
\pi \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos x)^2 \,\mathrm{d}x &\overset{1p}{=} \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\cos x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{2p}{=} \pi \left[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&\overset{1p}{=} \pi \left(\frac{3}{2}\pi + 0 + 0 - \left(-\frac{3}{2}\pi + 0 + 0\right)\right) \\
&= 3\pi^2.
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ és $\underline{u} = (1,2,3)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

Megoldás: Mivel $\langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle = 6$ és $\|\underline{v}_1\| = \sqrt{3}$ 2p, ezért $\underline{u}$-nak a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos komponense $2\underline{v}_1$, a merőleges komponens pedig $\underline{v}_2 = (-1,0,1)$ 2p.
$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 3p$$

4. Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ és $\underline{u} = (3,2,1)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

Megoldás: Mivel $\langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle = 6$ és $\|\underline{v}_1\| = \sqrt{3}$ 2p, ezért $\underline{u}$-nak a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos komponense $2\underline{v}_1$, a merőleges komponens pedig $\underline{v}_2 = (1,0,-1)$ 2p.

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad 3p$$

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

Megoldás: Sajátértékek $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ 1p, sajátvektorok $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2p, ezért

$$A = PDP^{-1}, \text{ ahol } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; 1p, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; 1p, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \; 2p$$

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

Megoldás: Sajátértékek $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ 1p, sajátvektorok $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2p, ezért

$$A = PDP^{-1}, \text{ ahol } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; 1p, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; 1p, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; 2p$$

5. Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

Megoldás: Sajátértékek $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ 1p, sajátvektorok $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2p, ezért

$$A = PDP^{-1}, \text{ ahol } P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; 1p, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \; 1p, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \; 2p$$

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{3 - 8n + n^2}{5n + 2n^2 + 1} \right)^{3n-4}$$

sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel az alap határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8n + n^2}{5n + 2n^2 + 1} = \frac{1}{2}, \; 4p$$

és a kitevő $3n - 4 \to \infty$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 3p.

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{5+3n-2n^2}{4-n^2}\right)^{n+5}$$

sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel az alap határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+3n-2n^2}{4-n^2} = 2, \ 4p$$

és a kitevő $n+5 \to \infty$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 3p.

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{1+3n+n^2}{n^2-4}\right)^{1-n}$$

sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel az alap határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3n+n^2}{n^2-4} = 1, \ 2p$$

ezért felírható

$$\frac{1+3n+n^2}{n^2-4} = 1 + \frac{3n+5}{n^2-4} \ 2p$$

alakban. Továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n^2-4}(1-n) = -3, \ 2p$$

ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-3}$ 1p.

Elméleti feladatok

7. (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.

   (b) Határozzuk meg a $2x - 3y + z = 5$ és $-4x + 6y - 2z = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

   Megoldás:

   (a) Párhuzamos (nincs megoldás), metsző (végtelen sok megoldás), azonos (végtelen sok megoldás). 3p

   (b) Párhuzamos, az egyenletrendszernek nincs megoldása. 4p

7. (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.

   (b) Határozzuk meg a $x + 2y - 2z = 3$ és $-2x - 4y + 4z + 6 = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

   Megoldás:

   (a) Párhuzamos (nincs megoldás), metsző (végtelen sok megoldás), azonos (végtelen sok megoldás). 3p

   (b) Azonos, az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. 4p

8. Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sin(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$-ban. Értelmezzük az

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}, \qquad \widetilde{x}_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + n2n}$$

sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} x_n$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\widetilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0-beli határértékének létezésére.

Megoldás: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$ 2p, $f(x_n) = 1$ és $f(\widetilde{x}_n) = -1$ 3p. Mivel két 0-hoz tartó sorozat mentén más a függvényértékek határértéke, ezért az $f(x)$ függvénynek nem létezik a határértéke 0-ban. 2p

8. Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$-ban. Értelmezzük az
$$x_n = \frac{1}{n2\pi}, \qquad \widetilde{x}_n = \frac{1}{\pi + n2n}$$
sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} x_n$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\widetilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0-beli határértékének létezésére.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$ 2p, $f(x_n) = 1$ és $f(\widetilde{x}_n) = -1$ 3p. Mivel két 0-hoz tartó sorozat mentén más a függvényértékek határértéke, ezért az $f(x)$ függvénynek nem létezik a határértéke 0-ban. 2p

9. Alkalmazható-e a Rolle-féle középértéktétel a $[0, 1]$ intervallumon az alábbi függvényekre? Ha igen, mutassunk olyan pontot a $[0, 1]$ intervallumban, amelyben az adott függvény rendelkezik a tétel által garantált tulajdonsággal. Ha nem, adjuk meg, hogy a tétel melyik feltétele sérül.

   - $f(x) = 1 - x$;
   - $g(x) = \sin(\pi x)$;
   - $h(x) = \cos(\pi x)$;
   - $i(x) = \mathrm{tg}(\pi x)$;
   - $j(x) = 0$;
   - $k(x) = (x - 3)(x + 2)$;
   - $l(x) = |1 - 2x|$.

   Megoldás:

   - Nem, $f(0) = 1 \neq 0 = f(1)$;
   - igen, $g'(x) = \pi\cos(\pi x)$, amelyre $g'(1/2) = 0$;
   - nem, $h(0) = 1 \neq -1 = h(1)$;
   - nem, $i(x)$ nem értelmezett 1/2-ben;
   - igen, $j'(x) = 0$, ezért bármely $x \in (0, 1)$-re $j'(x) = 0$;
   - igen, $k'(x) = 2x - 1$, amelyre $k'(1/2) = 0$;
   - nem, $l(x)$ nem differenciálható 1/2-ben.

   Minden válasz 1p, de csak indoklással fogadható el.

Minden feladat 7 pontos.