

Név: .....  
Neptun-kód: .....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

### Matematika EP1 vizsga, 2022. jún. 3.

**Integrálási feladatok** (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás segítségével számoljuk ki az

$$\int (x - 2) \cos 3x \, dx$$

integrált.

2. Mennyi az

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin 2x + \sin^2 x + \sin^2 x \cos x) \, dx$$

határozott integrál értéke? A számításnál hasznos lehet a  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  azonosság.

3. Számítsuk ki az  $x(t) = \cos(\pi t^2)$ ,  $y(t) = \sin(\pi t^2)$  paraméteresen adott görbe ívhosszát a  $0 \leq t \leq 1$  paramétertartományban.

### Számítási feladatok

4. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 5 - t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

egyenes és a  $P = (1, 3, -2)$  pont távolságát a következő lépésekben. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az egyenesre és illeszkedik a  $P$  pontra. Számoljuk ki a sík és az egyenes metszéspontját, majd határozzuk meg a metszéspont és  $P$  távolságát.

5. Mennyi az

$$a_n = \left( \frac{3(n-1) - n}{2n+1} \right)^{3-5n}$$

sorozat határértéke?

6. Tekintsük az  $f(x) = 1/x$  függvény grafikonját. Írjuk fel minden  $a > 0$  esetén a görbe  $(a, 1/a)$  pontjához húzott érintőegyenest. Számítsuk ki az érintőegyenest és a két koordinátatengely által meghatározott háromszög területét, és mutassuk meg, hogy a terület nem függ az  $a$  paraméter választásától.

### Elméleti feladatok

7. (a) Legyen adott az  $\mathbb{R}^3$  tér egy lineáris transzformációjának  $A$  mátrixa. A transzformáció  $A$  mátrixának ismeretében hogyan ellenőrizhető, hogy a standard bázis vektoraira külön-külön alkalmazva a lineáris transzformációt olyan vektorokhoz jutunk-e, amelyek az  $\mathbb{R}^3$  tér egy bázisát alkotják?
- (b) Írjuk fel annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az  $xz$  síkban  $\pi/2$  szöggel forog, az  $y$  irányban pedig kétszeresére nyújt. Ellenőrizzük az előző részben szereplő feltételt.
8. (a) Adjuk meg, mit jelent az  $f(x)$  függvény  $x_0$  pontbeli differenciálhányadosa.
- (b) A definíció alapján számítsuk ki az  $f(x) = e^x$  függvény differenciálhányadosát az  $x_0 = 0$  pontban. Ehhez használjuk a képletgyűjteményben szereplő megfelelő nevezetes függvényhatárértéket.
9. (a) Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt.
- (b) A tétel segítségével számoljuk ki az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$$

függvény határozott integrálját a  $[0, 1/2]$  intervallumon.

Minden feladat 7 pontos.