Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2022. jún. 15.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{6x^2 - 5x + 4}{2x - 1}\,\mathrm{d}x$$
integrált.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \left(\frac{\cosh x}{\sqrt[3]{(\sinh x + 1)^2}} + (x^2 + 1) \cdot e^{x^3+3x} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki annak a homogén síklemezből kivágott síkidomnak a tömegközéppontját, amely az $f(x) = 1/x^2$ függvény grafikonja és az x tengely közé esik az $1 \le x \le 10$ határok között.

Számítási feladatok

4. Adottak az
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
mátrix és vektorok. Számoljuk ki a A mátrix inverzét majd az $\underline{u}^T A^{-1} \underline{v}$ szorzatot.

5. Az
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
mátrixnak az $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok sajátvektorai. Ennek segítségével ortogonálisan diagonalizáljuk az A mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban alkalmas P ortogonális és D diagonális mátrixokkal. Az előbbiek felhasználásával írjuk fel az A^{10} mátrixhatványt három mátrix szorzataként, amelyeket külön-külön meg kell adni, de a szorzatukat már nem kell kiszámolni.

6. Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter mely értéke mellett folytonos az
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2+x)^3} - 2^{3/2}}{3x} & \text{ha } x > 0 \\ a - \log_2(1-x) & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$
függvény?

Elméleti feladatok

7. (a) Adott $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén hogyan jellemezhetjük a $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat irányát, nagyságát és állását?
   (b) Az $\underline{u} = (1, 2, 0)$ és $\underline{v} = (3, 1, 1)$ vektorok esetén számoljuk ki a vektoriális szorzatukat, majd határozzuk meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által bezárt α szög szinuszát. Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ skaláris szorzatának segítségével számoljuk ki a bezárt szög koszinuszát. Végül ellenőrizzük a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggést.

8. (a) Írjuk le, mit jelent, hogy az a_n sorozat felülről korlátos, monoton növő, ill. konvergens?
   (b) Válaszoljunk az alábbi kérdésekre rövid indoklással (esetleg tanult állításokra hivatkozva) vagy ellenpéldával. Van-e olyan sorozat, amely felülről korlátos, monoton növő, de nem konvergens? Van-e olyan sorozat, amely monoton növő, konvergens, de nem felülről korlátos? Van-e olyan sorozat, amely felülről korlátos, konvergens, de nem monoton növő?

9. (a) Az x_0 pontban differenciálható $f(x)$ függvény esetén mi az x_0-beli lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele? Az $f(x) = x^3$ függvény példáján mutassuk meg, hogy a feltétel nem elégséges.
   (b) Az x_0 pontban kétszer differenciálható $f(x)$ függvény esetén mi az x_0-beli lokális minimum létezésének elégséges feltétele? Az $f(x) = x^4$ függvény példáján mutassuk meg, hogy a feltétel nem szükséges.

Minden feladat 7 pontos.