

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2022. jún. 27.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az

$$\int \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + e^x + 1} dx$$

integrálban végezzük el az $u = e^x$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változó segítségével.

2. Mennyi az

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right)^3 + (x + x^3) \cdot \sqrt[4]{3 + 2x^2 + x^4} \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy az $f(x) = 1 + \cos x$ függvény grafikonjának $-\pi \leq x \leq \pi$ közötti darabját az x tengely körül megforgatjunk. Segítség: használjuk a $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ összefüggést.

Számítási feladatok

4. Adottak az

$$e = \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 3 \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

egyenesek. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az e egyenest tartalmazza, és párhuzamos az f egyenessel. Segítség: a keresett sík normálvektora merőleges mindkét egyenesre.

5. Mennyi az

$$a_n = \frac{5n^2 - 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 5^{1-n}}{3^{n+1} + (n+1)^3}$$

sorozat határértéke?

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \ln x - 3x + x^2$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Hány megoldása lehet egy lineáris egyenletrendszernek? Adjunk meg minden lehetőséget.
(b) Az

$$\begin{aligned} x + 2y + \clubsuit z &= 2 \\ y + \heartsuit z &= 3 \\ \spadesuit z &= -1 \end{aligned}$$

lépcsős alakra hozott lineáris egyenletrendszerben szereplő $\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit$ szimbólumok értékének megadásával mutassunk példát az előző feladatrészen leírt minden lehetséges megoldásszámra. Számoljuk is ki ezeket a megoldásokat. Ha valamilyen megoldásszám ebben a példában nem állítható elő, azt röviden indokoljuk.

8. (a) Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt.
(b) Határozzuk meg a tétel által garantált pont helyét az $f(x) = x^3$ függvény esetén a $[0, 1]$ intervallumon.

9. (a) Mit értünk egy adott $f(x)$ függvényhez tartozó primitív függvényen egy adott I intervallumon?
(b) Mit mondhatunk egy adott $f(x)$ függvényhez tartozó I -n vett két primitív függvény különbségéről?
(c) Adjuk meg az $f(x) = \sin(2x) + 3$ összes primitív függvényét az $I = \mathbb{R}$ -en.

Minden feladat 7 pontos.