Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2023. dec. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az
$$\int \frac{6x^3+5x^2-3x+4}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \left(3\sinh x\,(\cosh x-1)^2 - \frac{6x-5}{3x^2-5x+3}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. A karácsonyi bejgli keresztmetszetén a feltekert tészta vonalát centiméterben mérve az $r(\varphi)=\frac{\varphi}{2\pi}$ polárkoordinátásan adott görbe írja le. A tésztát négyszer tekerjük körbe. Integrálással számoljuk ki egy 30 cm hosszú rúd térfogatát. A keresztmetszeti felület kiszámításához írjuk fel a fenti görbe által meghatározott szektortartomány területét, ahol a φ szög 6π és 8π között változik.

Számítási feladatok

4. Adottak a térben a $3x+4y-2z=6$ és $x-2y+3z=3$ egyenletű síkok. Számoljuk ki a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0. Ezen metszéspont segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

5. Mennyi az
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^{2n^2-3n}$$
sorozat határértéke?

6. Vizsgáljuk meg az $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}\in\mathbb{R}^3$ vektorok esetén hogyan számítható ki az általuk feszített paralelepipedon térfogata?
   (b) Végezzük el ezt a számítást az
$$\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \underline{c}=\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$$
   esetben.
   (c) Vegyük észre, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által feszített oldalhoz tartozó magasság nem változik, ha $\underline{c}$-hez $\underline{a}$-t vagy $\underline{b}$-t hozzáadjuk, így a térfogat is változatlan marad. Számoljuk ki az új $\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{a}$ és $\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{b}$ által feszített paralelepipedonok térfogatát is.
   (d) A determináns milyen tulajdonsága miatt tudható a fenti eredmény számolás nélkül is?

8. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Az alábbi határértékek közül melyik esetekben alkalmazható? Ahol alkalmazható, számítsuk is ki a függvényhatárértéket.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^3},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1},\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1},\qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

9. (a) Az $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén definiáljuk az
$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$
   improprius integrált függvényhatárértékként.
   (b) Az $f(x)=1/x^3$ esetén számítsuk ki ezt a függvényhatárértéket és egyben az improprius integrál értékét.

Minden feladat 7 pontos.