Név:	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy
Neptun-kód:													

Matematika EP1 vizsga, 2024. jan. 12.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int \left(4x\cos(x^2) - 6x\sin(x^2)\right) \mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u = x^2$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt fejezzük ki az eredeti x változó segítségével.

2. Mennyi az
$$\int_0^2 \left(\left(8x - 6x^2 + 3\sqrt{x}\right) \sqrt[3]{x(2x - x^2 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki az $y = x^2$ és $y = 2x + 3$ görbék által közrefogott korlátos síkidom területét.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel az
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$$
egyenes $t = 1$ paraméterértékű pontján átmenő és az egyenesre merőleges sík egyenletét. Milyen távolságra van ettől a síktól a $Q = (3, 0, -1)$ pont?

5. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$ szöggel forgat, a z irányban pedig háromszorosára nyújt. Számítsuk ki a kapott A mátrix A^{-1} inverzmátrixát.

6. Írjuk fel az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény másodfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pontban, azaz azt a legfeljebb másodfokú polinomot, amely másodrendben érinti az $f(x)$ grafikonját x_0-ban.

Elméleti feladatok

7. (a) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorokról hogyan ellenőrizhető, hogy bázist alkotnak-e?

   (b) A fenti feltétel alapján döntsük el, hogy az
$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$
vektorok az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa-e.

   (c) Fejezzük ki a
$$\underline{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}$$
vektort az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ehhez oldjuk meg a lineáris kombináció együtthatóira fennálló lineáris egyenletrendszert.

8. (a) Mikor mondjuk, hogy az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ valós szám?

   (b) Mennyi az
$$a_n = \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1}$$
sorozat határértéke? A fenti definíció alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó legkisebb küszöbindexet.

9. Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon és differenciálható $(0, 1)$-en. Tegyük fel, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Lehet-e ekkor, hogy

   (a) $f(x) > 0$ valamely $x \in (0, 1)$-re;

   (b) $f(x) < 0$ valamely $x \in (0, 1)$-re;

   (c) $f(x) > 0$ minden $x \in (0, 1)$-re;

   (d) $f(x) < 0$ minden $x \in (0, 1)$-re?

   Igenlő válasz esetén adjunk példát, a nemleges választ indokoljuk.

Minden feladat 7 pontos.