Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2024. jan. 19.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás alkalmazásával számítsuk ki az
$$\int \left(9x^2 - 4x + 7\right) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$$
integrált.

2. Mennyi az
$$\int_1^2 \left(\frac{2e^{2x} + e^{-x}}{(e^{2x} - e^{-x})^3} + \frac{x-1}{x+1} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke? Az exponenciális tagot a behelyettesítés után nem kell tovább egyszerűsíteni.

3. Integrálással számítsuk ki az $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ paraméteresen adott cikloisgörbe ívhosszát a $t \in [0, 2\pi]$ paramétertartományon.

   Segítség: a felírt integrálformulában egyszerűsítés után alkalmazzuk az $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$ azonosságot.

Számítási feladatok

4. Adottak a
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
vektorok. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére, majd a merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. Legyen $\underline{v}_3$ a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok vektoriális szorzata. Ellenőrizzük, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ páronként merőleges vektorok.

5. Adottak az
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
mátrix és vektor. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $\underline{e}_3^T A^{-1} \underline{e}_3$ szorzatot.

6. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire lesz az
$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{ha } x \le -1 \\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + (x+1)^2}{x^2 + 3x + 2} & \text{ha } -1 < x < 1 \\ x^2 + b & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$
függvény minden x-re folytonos?

Elméleti feladatok

7. (a) Egy három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszer esetén az együtthatómátrix ismeretében mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldásainak számáról?

   (b) A
$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y + z &= 13 \\ x + 4y + z &= -3 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszer esetén a megoldás kiszámolása nélkül csak az együtthatómátrix segítségével határozzuk meg, hány megoldása lehet az egyenletrendszernek. Tudva, hogy az $x = 2, y = -2, z = 3$ egy megoldása az egyenletrendszernek, mennyi lehet a megoldások száma?

8. (a) Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet.

   (b) Számítsuk ki az
$$a_n = \frac{2n \cdot \sin(3n)}{5n^2 - 4n}$$
sorozat határértékét a rendőrelv felhasználásával.

   Segítség: a $-1 \le \sin x \le 1$ egyenlőtlenség alapján adjunk alsó és felső becslést a sorozatra.

9. (a) Legyen f kétszer differenciálható függvény $\mathbb{R}$-en. Milyen kapcsolatban van az $f''(x)$ második derivált értéke és az f függvény konvex vagy konkáv tulajdonsága egy (a, b) intervallumon?

   (b) Mely intervallumokon konvex ill. konkáv az $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 7x + 8$ függvény?

Minden feladat 7 pontos.