

Név:
 Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2024. jan. 26.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az

$$\int x\sqrt{2x+1} dx$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u = \sqrt{2x+1}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt fejezzük ki az eredeti x változó segítségével.

2. Mennyi az

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}{x^2 \cdot x^0 \cdot x^2 \cdot x^4} \right)^{-1/4} - \frac{2x - \pi \sin(\pi x)}{1 + x^2 + \cos(\pi x)} \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Az $y = x^2 - 1$ parabola azon darabját, amely az x tengely alá esik, forgassuk meg az x tengely körül. Integrálással számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel annak az \mathbb{R}^2 síkbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az $y = x$ egyenesre tükröz. Írjuk fel annak az \mathbb{R}^2 síkbeli lineáris transzformációnak a B mátrixát, amely az y tengelyre tükröz. Számítsuk ki az AB mátrixszorzatot, amely annak az összetett transzformációnak a mátrixa, amely először B aztán A alkalmazásának felel meg. Számítsuk ki a BA mátrixszorzatot is, és a két szorzat összehasonlításával indokoljuk meg, hogy a két transzformáció nem felcserélhető.

5. Mennyi az

$$a_n = \frac{(3n^7 - 5 \cdot 2^{n+3})(2^{3-n} + 2^{n-3})}{2^{n+1} - 3^n + 4^{n-1}}$$

sorozat határértéke?

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Mik az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságai (irány, nagyság, állás)?

(b) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

és jelölje α az \underline{u} és \underline{v} vektorok szögét. Számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\sin \alpha$ -t. Számoljuk ki az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ skaláris szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\cos \alpha$ -t. Ellenőrizzük a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ egyenlőséget.

8. (a) Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ háromszor differenciálható függvények harmadrendben érintik egymást az x_0 pontban?

(b) Adott $f(x) = \sin(2x + \pi) - 1 + x^2$. Keressük meg azt a legfeljebb harmadfokú $g(x)$ polinomot, amely harmadrendben érinti $f(x)$ -et $x_0 = 0$ -ban, azaz $f(x)$ -nek a 0-ban felírt harmadfokú Taylor-polinomját.

9. (a) Mondjuk ki a Newton–Leibniz-formulát a határozott integrál kiszámításáról a primitív függvény segítségével.

(b) A tétel felhasználásával adjuk meg az

$$\int_{2\pi}^{5\pi} \left(\cos x + \frac{1}{x - \pi} \right) dx$$

határozott integrál értékét.

Minden feladat 7 pontos.