Matematika EP1 vizsga megoldása, 2023. dec. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az
$$\int \frac{6x^3+5x^2-3x+4}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

   Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3+5x^2-3x+4}{2x+1}\,\mathrm{d}x &\overset{4p}{=} \int\left(3x^2+x-2+\frac{6}{2x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &\overset{3p}{=} x^3+\frac{x^2}{2}-2x+6\frac{\ln|2x+1|}{2}+c\\ &= x^3+\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|2x+1|+c\end{aligned}$$

2. Mennyi az
$$\int_0^1\left(3\sinh x\,(\cosh x-1)^2-\frac{6x-5}{3x^2-5x+3}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: Mivel $(\cosh x-1)'=\sinh x$ és $(3x^2-5x+3)'=6x-5$, ezért
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(3\sinh x\,(\cosh x-1)^2-\frac{6x-5}{3x^2-5x+3}\right)\mathrm{d}x &= \left[(\cosh x-1)^3-\ln|3x^2-5x+3|\right]_0^1\\ &= (\cosh 1-1)^3-\ln 1-\left((\cosh 0-1)^3-\ln 3\right)\\ &= (\cosh 1-1)^3+\ln 3\end{aligned}$$

   4p+3p

3. A karácsonyi bejgli keresztmetszetén a feltekert tészta vonalát centiméterben mérve az $r(\varphi)=\frac{\varphi}{2\pi}$ polárkoordinátásan adott görbe írja le. A tésztát négyszer tekerjük körbe. Integrálással számoljuk ki egy 30 cm hosszú rúd térfogatát. A keresztmetszeti felület kiszámításához írjuk fel a fenti görbe által meghatározott szektortartomány területét, ahol a φ szög 6π és 8π között változik.

   Megoldás: A keresztmetszeti felület értéke cm^2-ben 2p
$$\frac{1}{2}\int_{6\pi}^{8\pi}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\mathrm{d}\varphi \overset{3p}{=} \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_{6\pi}^{8\pi} \overset{1p}{=} \frac{(8\pi)^3-(6\pi)^3}{3\cdot 8\pi^2} = \frac{(512-216)\pi^3}{24\pi^2} = \frac{296\pi^3}{24\pi^2} = \frac{37}{3}\pi,$$
   ezért egy rúd térfogata $30\cdot\frac{37}{3}\pi = 370\pi\ \mathrm{cm}^3$. 1p

Számítási feladatok

4. Adottak a térben a $3x+4y-2z=6$ és $x-2y+3z=3$ egyenletű síkok. Számoljuk ki a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0. Ezen metszéspont segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

   Megoldás: A metszéspont a $4y-2z=6$ és $-2y+3z=3$ megoldása, ami a $(0,3,3)$ pont. 3p A metszésvonal irányvektora merőleges a két sík normálvektorára, ezért választható ezek vektoriális szorzatának:
$$\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix} \overset{2p}{=} \begin{pmatrix}8\\-11\\-10\end{pmatrix}.$$
   A metszésvonal paraméteres egyenletrendszere 2p
$$\begin{cases}x=8t\\ y=-11t+3\\ z=-10t+3\end{cases}$$

5. $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ Mennyi az

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^{2n^2-3n}$$

sorozat határértéke?

Megoldás:

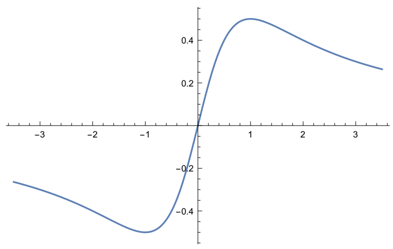
$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^{2n^2-3n} \overset{2p}{=} \left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^{2n^2-3n} \overset{3p}{\to} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n(n+1)}} \overset{2p}{=} e^2$$

6. Vizsgáljuk meg az $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Megoldás: Az értelmezési tartomány a teljes $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ 1p \qquad f''(x)=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3},\ 1p$$

ezért $f'(x)=0$ az $x=\pm1$, 1p az $f''(x)=0$ az $x=0$ és $x=\pm\sqrt{3}$ pontokban teljesül. 1p Az első derivált előjelét figyelembe véve f a $(-\infty,-1)$-en monoton csökkenő, $(-1,1)$-en monoton növő, $(1,\infty)$-en monoton csökkenő, -1-ben lokális minimuma, 1-ben lokális maximuma van. 1p A második derivált előjele alapján f a $(-\infty,-\sqrt{3})$-on konkáv, $(-\sqrt{3},0)$-n konvex, $(0,\sqrt{3})$-on konkáv, $(\sqrt{3},\infty)$-en konvex, $\pm\sqrt{3}$-ban és 0-ban inflexiós pontja van. 1p A függvény grafikonja az ábrán látható. 1p



Elméleti feladatok

7. (a) Az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}\in\mathbb{R}^3$ vektorok esetén hogyan számítható ki az általuk feszített paralelepipedon térfogata?

(b) Végezzük el ezt a számítást az

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \underline{c}=\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$$

esetben.

(c) Vegyük észre, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által feszített oldalhoz tartozó magasság nem változik, ha $\underline{c}$-hez $\underline{a}$-t vagy $\underline{b}$-t hozzáadjuk, így a térfogat is változatlan marad. Számoljuk ki az új $\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{a}$ és $\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{b}$ által feszített paralelepipedonok térfogatát is.

(d) A determináns milyen tulajdonsága miatt tudható a fenti eredmény számolás nélkül is?

Megoldás:

(a) A feszített paralelepipedon térfogata a három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke. 2p Az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok vegyes szorzata $\underline{abc}=(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}$ a három vektorból mint sorvektorokból képzett mátrix determinánsa.

(b)

$$\begin{vmatrix}2&1&-2\\3&0&1\\5&2&2\end{vmatrix}\overset{2p}{=}-17$$

A paralelepipedon térfogata 17.

(c)

$$\begin{vmatrix}2&1&-2\\3&0&1\\7&3&0\end{vmatrix}\overset{1p}{=}-17,\qquad \begin{vmatrix}2&1&-2\\3&0&1\\8&2&3\end{vmatrix}\overset{1p}{=}-17$$

Ezen két paralelepipedon térfogata is 17.

(d) A deremináns nem változik, ha az egyik sorához hozzáadjuk egy másik sorát (vagy annak konstansszorosát). 1p

8. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Az alábbi határértékek közül melyik esetekben alkalmazható? Ahol alkalmazható, számítsuk is ki a függvényhatárértéket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^3},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1},\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1},\qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

Megoldás: Legyen $f(x)$ és $g(x)$ az x_0 pont egy környezetében differenciálható függvények esetleg az x_0 pontot kivéve és $g'(x)\neq 0$ ebben a környezetben. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Ha létezik $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor létezik a $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ is, és a két határérték megegyezik, azaz

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3p

- A $\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^3}$ esetén nem alkalmazható, mert $\lim_{x\to 0}(2x+1) = 1$, $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$. 1p
- $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{3x^2+4x-2} \stackrel{1p}{=} \frac{-1}{5}.$$
- A $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1}$ esetén nem alkalmazható, mert $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2) =)$, $\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-2x-1) = 11$. 1p
- A $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ esetén nem alkalmazható, mert $\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{tg} x$ nem létezik, $\lim_{x\to\pi/2}\sin x = 1$. 1p

9. (a) Az $f : [1,\infty)\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén definiáljuk az

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

impropius integrált függvényhatárértékként.

(b) Az $f(x) = 1/x^3$ esetén számítsuk ki ezt a függvényhatárértéket és egyben az impropius integrál értékét.

Megoldás:

(a)

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{3p}{=} \lim_{R\to\infty}\int_1^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

(b)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \stackrel{1p}{=} \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \stackrel{1p}{=} \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^R \stackrel{1p}{=} \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2R^2}\right) \stackrel{1p}{=} \frac{1}{2}$$