Matematika EP1 vizsga megoldása, 2024. jan. 12.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az

$$\int \left(4x\cos(x^2) - 6x\sin(x^2)\right) \mathrm{d}x$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u = x^2$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt fejezzük ki az eredeti x változó segítségével.

Megoldás: Mivel $u = x^2$, ezért $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$. 2p

$$\begin{aligned}\int \left(4x\cos(x^2) - 6x\sin(x^2)\right) \mathrm{d}x &= \int \left(2\cos(x^2) - 3\sin(x^2)\right) \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &\overset{3p}{=} \int (2\cos u - 3\sin u)\mathrm{d}u \\ &\overset{1p}{=} 2\sin u + 3\cos u + c \\ &\overset{1p}{=} 2\sin(x^2) + 3\cos(x^2) + c\end{aligned}$$

2. Mennyi az

$$\int_0^2 \left(\left(8x - 6x^2 + 3\sqrt{x}\right) \sqrt[3]{x(2x - x^2 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} \right) \mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

Megoldás: Vegyük észre, hogy az első tagban a köbgyök alatt álló kifejezés deriváltja $(x(2x - x^2 + \sqrt{x}))' = (2x^2 - x^3 + x^{3/2})' = 4x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^{1/2}$ éppen a köbgyök szorzójának a fele. 1p Másrészt

$$\frac{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} = x^{\frac{2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4} - \frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}}. \ 1p$$

Ezért

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \left(\left(8x - 6x^2 + 3\sqrt{x}\right) \sqrt[3]{x(2x - x^2 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} \right) \mathrm{d}x \\ &\overset{2+2p}{=} \left[2 \cdot \frac{3}{4} \left(2x^2 - x^3 + x^{3/2}\right)^{4/3} + \frac{4}{5}x^{5/4} \right]_0^2 \\ &\overset{1p}{=} 2 \cdot \frac{3}{4}(2 \cdot 2^2 - 2^3 + 2^{3/2})^{4/3} + \frac{4}{5} \cdot 2^{5/4} \\ &= 6 + \frac{8}{5}\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

3. Integrálással számítsuk ki az $y = x^2$ és $y = 2x + 3$ görbék által közrefogott korlátos síkidom területét.

Megoldás: A két görbe egyenletéből mint egyenletrendszerből a metszéspontok a $(-1, 1)$ és $(3, 9)$ pontoknak adódnak. 2p A két görbe közötti korlátos síkidom területe 2p

$$\int_{-1}^3 \left(2x + 3 - x^2\right) \mathrm{d}x \overset{1p}{=} \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 \overset{1p}{=} 9 + 9 - \frac{27}{3} - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) \overset{1p}{=} \frac{32}{3}$$

Számítási feladatok

4. Írjuk fel az

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

egyenes $t = 1$ paraméterértékű pontján átmenő és az egyenesre merőleges sík egyenletét. Milyen távolságra van ettől a síktól a $Q = (3, 0, -1)$ pont?

Megoldás: A $t = 1$ paraméterértékű pont az $(5, -2, 0)$. 1p Az egyenesre merőleges sík normálvektora lehet az egyenes $(3, 2, -1)$ irányvektora. 1p Így a keresett sík egyenlete $3(x-5)+2(y+2)-z=0$. 2p Ettől a Q pont távolsága

$$\left|\frac{3(3-5)+2(0+2)-(-1)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{14}}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \; 3p$$

5. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$ szöggel forgat, a z irányban pedig háromszorosára nyújt. Számítsuk ki a kapott A mátrix A^{-1} inverzmátrixát.

   Megoldás: Az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ bázisvektorok képei rendre $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$. A képeket mint oszlopvektorokat mátrixba rendezve kapjuk, hogy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; 3p$$

   A mátrix determinánsa 3, 1p az aldeterminánsok és adjungált számításával adódik, hogy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \; 3p$$

   ami annak a lineáris transzformációnak a mátrixa, amely az xy síkban $-\pi/2$-vel forgat, z irányban 1/3-szorosára összehúz.

6. Írjuk fel az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény másodfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pontban, azaz azt a legfeljebb másodfokú polinomot, amely másodrendben érinti az $f(x)$ grafikonját x_0-ban.

   Megoldás: Mivel $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ 1p és $f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$, 2p behelyettesítve $f(0) = 1$, 1p $f'(0) = 0$, 1p $f''(0) = -2$, 1p ezért a keresett Taylor-polinom $1 - x^2$. 1p

Elméleti feladatok

7. (a) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorokról hogyan ellenőrizhető, hogy bázist alkotnak-e?

   (b) A fenti feltétel alapján döntsük el, hogy az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   vektorok az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa-e.

   (c) Fejezzük ki a

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   vektort az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ehhez oldjuk meg a lineáris kombináció együtthatóira fennálló lineáris egyenletrendszert.

   Megoldás:

   (a) Ha a vektorokból mint oszlopokból képzett mátrix determinánsa nem nulla, akkor a vektorok bázist alkotnak, ha nulla, akkor nem. 2p

   (b) Sarrus-szabállyal:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 2 + 2 - (2 + 4 + 3) = 1 \neq 0$$

   tehát bázist alkotnak. 2p

(c) A

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert 2p megoldva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

ahonnan $\lambda_3 = 4, \lambda_2 = -3, \lambda_1 = 2$. 1p

8. (a) Mikor mondjuk, hogy az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ valós szám?

(b) Mennyi az

$$a_n = \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1}$$

sorozat határértéke? A fenti definíció alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó legkisebb küszöbindexet.

Megoldás:

(a) Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan n_0 küszöbindex, amelyre $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n \geq n_0$ esetén. 3p

(b) A határérték 2, 1p ezért megoldjuk a

$$\left| \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1} - 2 \right| < 0{,}1$$

egyenlőtlenséget. 1p A bal oldal

$$\left| \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 5 - 2(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \right| = \left| \frac{-7}{n^2 + 1} \right| = \frac{7}{n^2 + 1},$$

ami pontosan akkor kisebb 0,1-nél, ha $n^2 + 1 > 70$, 1p azaz $n^2 > 69$, tehát $n > \sqrt{69}$. A legkisebb egész, amelyre ez teljesül, a $n_0 = 9$. 1p

9. Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon és differenciálható $(0, 1)$-en. Tegyük fel, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Lehet-e ekkor, hogy

(a) $f(x) > 0$ valamely $x \in (0, 1)$-re;

(b) $f(x) < 0$ valamely $x \in (0, 1)$-re;

(c) $f(x) > 0$ minden $x \in (0, 1)$-re;

(d) $f(x) < 0$ minden $x \in (0, 1)$-re?

Igenlő válasz esetén adjunk példát, a nemleges választ indokoljuk.

Megoldás:

(a) Igen, pl. $f(x) = x$ esetén $f(x) > 0$ minden $x \in (0, 1)$-re. 1p

(b) Igen, pl. az $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ függvény $x = 3/4$-ben $f(3/4) = 3/4 + \sin(3\pi/2) = -1/4$. 2p

(c) Igen, pl. $f(x) = x$ esetén $f(x) > 0$ minden $x \in (0, 1)$-re. 2p

(d) Nem, mert az $f(x)$ függvény 1-ben balról folytonos, azaz létezik a bal oldali határértéke, és ez megegyezik a függvényértékkel, azaz $\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = 1$. Ha létezne a keresett tulajdonságú függvény, akkor a függvény negatív lenne az 1-nek minden (1-et nem tartalmazó) bal oldali környezetében. Ezért $\lim_{x \to 1-} f(x) \leq 0$ állna fenn, ami ellentmond a folytonosságnak. 2p

9.* [1] Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon és differenciálható $(0, 1)$-en. Tegyük fel, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$. Lehet-e ekkor, hogy

(a) $f'(x) > 0$ valamely $x \in (0, 1)$-re;

[1] Egy másik változat, ez is érdekes lehet gyakorlásként.

(b) $f'(x) < 0$ valamely $x \in (0,1)$-re;

(c) $f'(x) > 0$ minden $x \in (0,1)$-re;

(d) $f'(x) < 0$ minden $x \in (0,1)$-re?

Igenlő válasz esetén adjunk példát, a nemleges választ indokoljuk.

Megoldás:

(a) Igen, pl. $f(x) = x$ esetén $f'(x) = 1 > 0$ minden $x \in (0,1)$-re. 1p

(b) Igen, pl. $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ esetén $f'(x) = 1 + 2\pi\cos(2\pi x)$, amely $x = 1/2$-re $f'(1/2) = 1 + 2\pi\cos\pi = 1 - 2\pi < 0$. 2p

(c) Igen, pl. $f(x) = x$ esetén $f'(x) = 1 > 0$ minden $x \in (0,1)$-re. 2p

(d) Nem, mert a Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik olyan $c \in (0,1)$, hogy

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

ahol a jobb oldal egyenlő 1-gyel. Ha $f'(x) < 0$ lenne minden $x \in (0,1)$-re, akkor nem lehetne ilyen c-t találni. 2p