Matematika EP1 vizsga megoldása, 2024. jan. 19.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás alkalmazásával számítsuk ki az

$$\int \left(9x^2 - 4x + 7\right) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$$

integrált.

Megoldás: A parciális integráláshoz legyen $f'(x) = 9x^2 - 4x + 7$ és $g(x) = \ln x$. Ekkor $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x$ és $g'(x) = 1/x$, 2p tehát

$$\begin{aligned}\int \left(9x^2 - 4x + 7\right) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x &\overset{3p}{=} \left(3x^3 - 2x^2 + 7x\right) \ln x - \int \left(3x^3 - 2x^2 + 7x\right) \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \left(3x^3 - 2x^2 + 7x\right) \ln x - \int \left(3x^2 - 2x + 7\right) \mathrm{d}x \\ &\overset{2p}{=} \left(3x^3 - 2x^2 + 7x\right) \ln x - x^3 + x^2 - 7x + c\end{aligned}$$

2. Mennyi az

$$\int_1^2 \left(\frac{2e^{2x} + e^{-x}}{(e^{2x} - e^{-x})^3} + \frac{x-1}{x+1} \right) \mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke? Az exponenciális tagot a behelyettesítés után nem kell tovább egyszerűsíteni.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{2e^{2x} + e^{-x}}{(e^{2x} - e^{-x})^3} + \frac{x-1}{x+1} \right) \mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\left(e^{2x} - e^{-x}\right)^{-3} \left(2e^{2x} + e^{-x}\right) + 1 - \frac{2}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(e^{2x} - e^{-x}\right)^{-2} + x - 2 \ln |x+1| \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2(e^4 - e^{-2})^2} + 2 - 2\ln 3 + \frac{1}{2(e^2 - e^{-1})^2} - 1 + 2 \ln 2 \\ &= \frac{1}{2(e^2 - e^{-1})^2} - \frac{1}{2(e^4 - e^{-2})^2} + 1 + 2 \ln \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4+3p

3. Integrálással számítsuk ki az $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ paraméteresen adott cikloisgörbe ívhosszát a $t \in [0, 2\pi]$ paramétertartományon.

Segítség: a felírt integrálformulában egyszerűsítés után alkalmazzuk az $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$ azonosságot.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 1 - \cos t$ és $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \sin t$, 1p ezért a keresett ívhossz 2p

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t \\ &\overset{1p}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left| 2 \sin \left(\frac{t}{2}\right) \right| \mathrm{d}t \\ &\overset{1p}{=} \int_0^{2\pi} 2 \sin \left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\ &\overset{1p}{=} \left[-4 \cos \left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -4(-1) - (-4 \cdot 1) \\ &\overset{1p}{=} 8\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Adottak a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vektorok. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére, majd a merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$-vel. Legyen $\underline{v}_3$ a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok vektoriális szorzata. Ellenőrizzük, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ páronként merőleges vektorok.

Megoldás: Mivel $\langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3(-2) = 18$ és $\|\underline{v}_1\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$, 1p ezért a párhuzamos komponens $\frac{18}{9}\underline{v}_1 = (4, 2, -4)^T$, 1p a merőleges komponens pedig $\underline{v}_2 = (5, 2, -3)^T - (4, 2, -4)^T = (1, 0, 1)^T$. 1p Továbbá

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{2p}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A merőlegesség ellenőrzése: 2p

$$\begin{aligned} \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 \\ \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle &= 2 \cdot 1 + 2(-4) - 2(-1) = 0 \\ \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle &= 1 \cdot 1 + 0(-4) + 1(-1) = 0 \end{aligned}$$

5. Adottak az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mátrix és vektor. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $\underline{e}_3^T A^{-1} \underline{e}_3$ szorzatot.

Megoldás: $\det(A) = -1$ 1p és

$$A^{-1} \overset{5p}{=} \begin{pmatrix} -11 & -37 & 14 \\ -4 & -13 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a keresett szorzat pedig az A^{-1} mátrix 3. sorának 3. eleme, azaz $\underline{e}_3^T A^{-1} \underline{e}_3 = -1$. 1p

6. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire lesz az

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{ha } x \le -1 \\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + (x+1)^2}{x^2+3x+2} & \text{ha } -1 < x < 1 \\ x^2 + b & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$

függvény minden x-re folytonos?

Megoldás: A folyonosságot az $x = -1$ és $x = 1$ pontokban kell csak ellenőrizni. Ehhez $\lim_{x\to-1-} f(x) = \lim_{x\to-1-} ax = -a$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1+} f(x) &= \lim_{x\to-1+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + (x+1)^2}{x^2+3x+2} \\ &= \lim_{x\to-1+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to-1+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)}{\frac{\pi}{4}(x+1)} \frac{\pi/4}{x+2} + \lim_{x\to-1+} \frac{x+1}{x+2} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0 \\ &\overset{3p}{=} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ahonnan $a = -\pi/4$. 1p Másrészt behelyettesítéssel

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + (x+1)^2}{x^2+3x+2} = \frac{\sin(\pi/2) + 2^2}{6} \overset{2p}{=} \frac{5}{6}$$

és $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} x^2 + b = 1 + b$, ezért $b = -1/6$. 1p

Elméleti feladatok

7. (a) Egy három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszer esetén az együtthatómátrix ismeretében mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldásainak számáról?

   (b) A

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y + z &= 13 \\ x + 4y + z &= -3 \end{aligned}$$

   lineáris egyenletrendszer esetén a megoldás kiszámolása nélkül csak az együtthatómátrix segítségével határozzuk meg, hány megoldása lehet az egyenletrendszernek. Tudva, hogy az $x = 2, y = -2, z = 3$ egy megoldása az egyenletrendszernek, mennyi lehet a megoldások száma?

   Megoldás:

   (a) Ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ha 0 a determináns, akkor nincs megoldás vagy végtelen sok megoldás van. 3p

   (b) Az adott egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa 0, 2p ezért az együtthatómátrix ismeretében az egyenletrendszernek nincs megoldása vagy végtelen sok megoldása lehetne. 1p Mivel ismerünk egy megoldást, ezért a megoldások száma végtelen lehet csak. 1p

8. (a) Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet.

   (b) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2n \cdot \sin(3n)}{5n^2 - 4n}$$

   sorozat határértékét a rendőrelv felhasználásával.

   Segítség: a $-1 \le \sin x \le 1$ egyenlőtlenség alapján adjunk alsó és felső becslést a sorozatra.

   Megoldás:

   (a) Ha $b_n \le a_n \le c_n$ minden n-re teljesül, továbbá $\lim_{n\to\infty} b_n$ és $\lim_{n\to\infty} c_n$ létezik és egymással egyenlő, akkor létezik a $\lim_{n\to\infty} a_n$ is, és értéke megegyezik a másik két sorozat határértékével. 3p

   (b) Mivel $-1 \le \sin(3n) \le 1$, ezért legyen

$$b_n = -\frac{2n}{5n^2 - 4n}, \qquad c_n = \frac{2n}{5n^2 - 4n},$$

   2p amelyre minden n-re fennáll a $b_n \le a_n \le c_n$ egyenlőtlenség. Mivel $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$, 1p ezért a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 1p

9. (a) Legyen f kétszer differenciálható függvény $\mathbb{R}$-en. Milyen kapcsolatban van az $f''(x)$ második derivált értéke és az f függvény konvex vagy konkáv tulajdonsága egy (a, b) intervallumon?

   (b) Mely intervallumokon konvex ill. konkáv az $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 7x + 8$ függvény?

   Megoldás:

   (a) Ha f konvex (konkáv) (a, b)-n, akkor $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) minden $x \in (a, b)$-re. Ha $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) minden $x \in (a, b)$-re, akkor f konvex (konkáv) (a, b)-n. 3p

   (b) Mivel az

$$f''(x) \overset{1p}{=} 12x^2 - 60x + 72 = 0$$

   egyenlet megoldásai $x = 2$ és $x = 3$, 1p ezért a következő intervallumokat tekintjük. A $(-\infty, 2)$-n $f'' > 0$, ezért f konvex; $(2, 3)$-on $f'' < 0$, ezért f konkáv; $(3, \infty)$-en $f'' > 0$, ezért f konvex. 2p