Matematika EP1 vizsga megoldása, 2024. jan. 26.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u=\sqrt{2x+1}$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt fejezzük ki az eredeti x változó segítségével.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ 1p és $x=\frac{u^2-1}{2}$, 1p ezért
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int x(2x+1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{2p}{=} \int \frac{u^2-1}{2}u^2\,\mathrm{d}u\\ &= \int\left(\frac{u^4}{2}-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\\ &\overset{2p}{=} \frac{u^5}{10}-\frac{u^3}{6}+c\\ &\overset{1p}{=} \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}-\frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}+c\end{aligned}$$

2. Mennyi az
$$\int_0^1\left(\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}{x^2\cdot x^0\cdot x^2\cdot x^4}\right)^{-1/4}-\frac{2x-\pi\sin(\pi x)}{1+x^2+\cos(\pi x)}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

Megoldás: Mivel
$$\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}{x^2\cdot x^0\cdot x^2\cdot x^4}=\frac{x^{1/2+1/3+1/6}}{x^8}=\frac{x}{x^8}=x^{-7}$$
és $(1+x^2+\cos(\pi x))'=2x-\pi\sin(\pi x)$, ezért
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}}{x^2\cdot x^0\cdot x^2\cdot x^4}\right)^{-1/4}-\frac{2x-\pi\sin(\pi x)}{1+x^2+\cos(\pi x)}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(x^{7/4}-\frac{2x-\pi\sin(\pi x)}{1+x^2+\cos(\pi x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{4}{11}x^{11/4}-\ln\left|1+x^2+\cos(\pi x)\right|\right]_0^1\\ &= \frac{4}{11}-\ln 1-\left(\frac{4}{11}\cdot 0-\ln 2\right)\\ &= \frac{4}{11}+\ln 2\end{aligned}$$

4+3p

3. Az $y=x^2-1$ parabola azon darabját, amely az x tengely alá esik, forgassuk meg az x tengely körül. Integrálással számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát.

Megoldás: A parabola két zérushelye a -1 és 1, 1p ezért a keresett forgástest térfogata 2p
$$\begin{aligned}\pi\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)^2\mathrm{d}x &= \pi\int_{-1}^1\left(x^4-2x^2+1\right)\mathrm{d}x\\ &\overset{2p}{=} \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right]_{-1}^1\\ &= \pi\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)\right)\\ &\overset{2p}{=} \frac{16\pi}{15}\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az $y = x$ egyenesre tükröz. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak a B mátrixát, amely az y tengelyre tükröz. Számítsuk ki az AB mátrixszorzatot, amely annak az összetett transzformációnak a mátrixa, amely először B aztán A alkalmazásának felel meg. Számítsuk ki a BA mátrixszorzatot is, és a két szorzat összehasonlításával indokoljuk meg, hogy a két transzformáció nem felcserélhető.

   Megoldás:

$$A \overset{2p}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \overset{2p}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AB \overset{1p}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA \overset{1p}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Mivel a két szorzat nem egyenlő, a két transzformáció nem felcserélhető. 1p

5. Mennyi az

$$a_n = \frac{\left(3n^7 - 5 \cdot 2^{n+3}\right)\left(2^{3-n} + 2^{n-3}\right)}{2^{n+1} - 3^n + 4^{n-1}}$$

   sorozat határértéke?

   Megoldás:

$$a_n = \frac{2^{-n}\left(3n^7 - 5 \cdot 2^{n+3}\right) 2^{-n}\left(2^{3-n} + 2^{n-3}\right)}{4^{-n}\left(2^{n+1} - 3^n + 4^{n-1}\right)} \overset{3p}{=} \frac{\left(\frac{3n^7}{2^n} - 5 \cdot 2^3\right)\left(2^{3-2n} + 2^{-3}\right)}{\left(\frac{2^{n+1}}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} + 4^{-1}\right)} \overset{4p}{\to} \frac{-5 \cdot 2^3 \cdot 2^{-3}}{4^{-1}} = -20$$

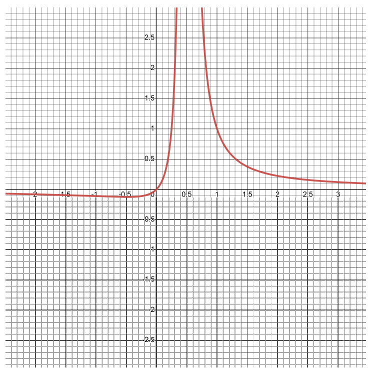
6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

   Megoldás:

   Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. Továbbá

$$f'(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)^3}, \qquad f''(x) = \frac{8+8x}{(1-2x)^4}$$

   2p ezért az $f'(x) = 0$ megoldása $x = -1/2$, $f''(x) = 0$ megoldása pedig $x = -1$. Így $(-\infty, -1/2)$-en $f'(x) < 0$, f monoton csökkenő, $(-1/2, 1/2)$-en $f'(x) > 0$, f monoton növő, $(1/2, \infty)$-en $f'(x) < 0$, f monoton csökkenő. Lokális minimum van $-1/2$-ben. 2p Másrészt $(-\infty, -1)$-en $f''(x) < 0$, f konkáv, $(-1, 1/2)$-en $f''(x) > 0$, f konvex, $(1/2, \infty)$-en $f''(x) > 0$, f konvex. Inflexiós pont van -1-ben. 2p



1p

Elméleti feladatok

7. (a) Mik az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságai (irány, nagyság, állás)?

   (b) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   és jelölje α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szögét. Számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\sin\alpha$-t. Számoljuk ki az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ skaláris szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\cos\alpha$-t. Ellenőrizzük a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ egyenlőséget.

   Megoldás:

   (a) Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzata merőleges $\underline{u}$-ra és $\underline{v}$-re is, nagysága egyenlő $\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \sin\alpha$, ahol α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szöge. A vektoriális szorzat állása olyan, hogy az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}$ vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak. 3p

(b)

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{1p}{=} \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

továbbá $\|\underline{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$, $\|\underline{u}\times\underline{v}\| = \sqrt{11^2+7^2+5^2} = \sqrt{195}$, ahonnan $\sin\alpha = \sqrt{195}/14$. 1p Másrészt $\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot 3 - 3\cdot 2 = -1$, ahonnan $\cos\alpha = -1/14$. 1p Teljesül, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 195/14^2 + 1/14^2 = 196/196 = 1$. 1p

8. (a) Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ háromszor differenciálható függvények harmadrendben érintik egymást az x_0 pontban?

   (b) Adott $f(x) = \sin(2x+\pi) - 1 + x^2$. Keressük meg azt a legfeljebb harmadfokú $g(x)$ polinomot, amely harmadrendben érinti $f(x)$-et $x_0 = 0$-ban, azaz $f(x)$-nek a 0-ban felírt harmadfokú Taylor-polinomját.

Megoldás:

(a) Hogy $f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), f''(x_0) = g''(x_0), f'''(x_0) = g'''(x_0)$. 3p

(b) Mivel $f'(x) = 2\cos(2x+\pi) + 2x$, $f''(x) = -4\sin(2x+\pi) + 2$, $f'''(x) = -8\cos(2x+\pi)$, behelyettesítve $f(0) = \sin\pi - 1 + 0 = -1$, $f'(0) = 2\cos\pi + 0 = -2$, $f''(0) = -4\sin\pi + 2 = 2$, $f'''(x) = -8\cos\pi = 8$, ahonnan $f(x)$ Taylor-polinomja $g(x) = -1 - 2x + x^2 + \frac{4}{3}x^3$. 4p

9. (a) Mondjuk ki a Newton – Leibniz-formulát a határozott integrál kiszámításáról a primitív függvény segítségével.

   (b) A tétel felhasználásával adjuk meg az

$$\int_{2\pi}^{5\pi} \left(\cos x + \frac{1}{x-\pi}\right) \mathrm{d}x$$

határozott integrál értékét.

Megoldás:

(a) Ha az $f(x)$ folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon, és $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

3p

(b) Legyen $f(x) = \cos x + \frac{1}{x-\pi}$, amely folytonos függvény az $[a,b] = [2\pi, 5\pi]$ intervallumon. Ekkor $F(x) = \sin x + \ln(x-\pi)$ választható primitív függvénynek, amellyel a tétel miatt

$$\int_{2\pi}^{5\pi} \left(\cos x + \frac{1}{x-\pi}\right) \mathrm{d}x = [\sin x + \ln(x-\pi)]_{2\pi}^{5\pi} = \sin 5\pi + \ln 4\pi - (\sin 2\pi + \ln\pi) = \ln 4$$

4p