Név:................................
Neptun-kód:.......................

HF	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2025. jan. 10.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) Végezzünk parciális integrálást az

$$\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

integrálban. Ehhez először bontsuk szorzattá az x^3 tényezőt úgy, hogy megjelenjen a $\sqrt{x^2+1}$ összetett függvény belső függvényének a deriváltja. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{x^2+1}$ és a belső függvény deriváltjának szorzata éppen egy alkalmas összetett függvény deriváltja. Ezt a deriváltat válasszuk a parciális integrálásnál az egyik tényezőnek.

2. (7 pont) Mennyi az

$$\int_{-\pi/4}^{0} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

3. (7 pont) Integrálással számoljuk ki az $r(\varphi) = 3e^{4\varphi/3}$ polárkoordinátásan adott spirálgörbe $\varphi \in [0,1]$ darabjának ívhosszát.

Számítási feladatok

4. (5 pont) Írjuk fel a térben az $A = (0,0,4)$, $B = (1,0,8)$, $C = (6,3,1)$ pontok által meghatározott sík egyenletét.

5. (5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{(n+3)(n-1)-n^2}{3n-5}\right)^{3-2n}$$

sorozat határértéke?

6. (5 pont) Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 6 cm. Mekkorák a háromszög oldalai, ha az oldalakra írt félkörök területeinek összege a lehető legkisebb?

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Egy V vektortérben mit jelent, hogy az $U \subseteq V$ részhalmaz alteret alkot?
   (b) (3 pont) A $V = \mathbb{R}^3$ vektortérben alteret alkotnak-e az $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ és az $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$ részhalmazok? A választ röviden indokoljuk.

8. (a) (3 pont) Mondjuk ki a függvények határértékére vonatkozó L'Hospital-szabályt.
   (b) (3 pont) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$$

   határértéket.

9. (a) (3 pont) Adott egy $f(x)$ korlátos függvény az $[a,b]$ intervallumon és adott az $[a,b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ felosztása. Értelmezzük az ezekhez tartozó alsó és felső integrálközelítő összegeket.
   (b) (3 pont) Számoljuk ki az $f(x) = x^3$ függvényhez és a $[0,10]$ intervallum azon felosztásához tartozó alsó és felső integrálközelítő összegeket, amelyben az osztópontok az egész számok ($x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_9 = 9, x_{10} = 10$). A közelítő összegeket hasonlítsuk össze a megfelelő határozott integrál értékével. Felhasználható a köbszámok összegére vonatkozó $1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 = 2025$ összefüggés.