

Név:.....
 Neptun-kód:.....

HF	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2025. jan. 17.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) Végezzük el az

$$\int \frac{4x^3 + 8x^2 - 3x + 5}{2x - 1} dx$$

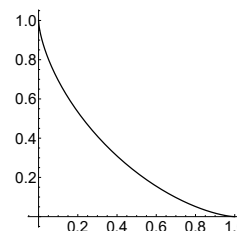
integrálást.

2. (7 pont) Mennyi az

$$\int_0^2 \left(\frac{4 \sinh x}{(\cosh x + 1)^5} - \left(\frac{x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}} \right)^2 \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. (7 pont) A szektortartomány területére vonatkozó integrálképlet segítségével számoljuk ki az $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, \pi/2]$ paraméterezéssel adott asztroidgörbe és a koordinátatengelyek által meghatározott területet. A kapott integrál kiszámításánál használjuk a $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t = \frac{1}{8} (1 - \cos 4t)$ összefüggést.



Számítási feladatok

4. (5 pont) Adottak az

$$e = \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 5 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 5t + 2 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

egyenesek a térben. Írjuk fel az e egyenlet tartalmazó és f -fel párhuzamos sík egyenletét. Van-e az e és f egyeneseknek metszéspontja?

5. (5 pont) Adjuk meg a $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(5x)}{7x^2} & \text{ha } x > 0 \\ 2 + p(x+1)^2 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

6. (5 pont) Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = 3 - x - 2x^2 + e^{-2x}$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Mit jelent, hogy néhány vektor bázist alkot a V vektortérben?
 (b) (1 pont) Bázist alkotnak-e az \mathbb{R}^3 vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ vektorok?
 (c) (1 pont) Bázist alkotnak-e az \mathbb{R}^3 vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$ vektorok?
 (d) (1 pont) Bázist alkotnak-e az \mathbb{R}^3 vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ vektorok?

A válaszokat röviden indokoljuk.

8. (a) (3 pont) Egy valós számsorozat esetén értelmezzük a monoton, korlátos és konvergens fogalmakat. (Adjuk meg a határérték definícióját is.)
 (b) (3 pont) Ha van, adjunk példát olyan sorozatra, amely
 A monoton és korlátos, de nem konvergens;
 B monoton és konvergens, de nem korlátos;
 C korlátos és konvergens, de nem monoton.

Ha nincs ilyen sorozat, röviden indokoljuk.

9. (a) (2 pont) Mondjuk ki a Rolle-féle középértéktételt.
 (b) (4 pont) Alkalmazható-e a tétel a $[0, 1]$ intervallumon az

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x), \quad g(x) = \sin(\pi x), \quad h(x) = \cos(\pi x), \quad i(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

függvényekre? Ha igen, keressük meg a tétel által garantált pontot. Ha nem, mutassuk meg, hogy a tétel melyik feltétele nem teljesül.