Név:................................

Neptun-kód:.......................

HF	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2025. jan. 24.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) A parciális integrálás kétszeri alkalmazásával végezzük el az
$$\int x^2 e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x$$
integrálást.

2. (7 pont) Mennyi az
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x+2}+\frac{10x}{\sqrt[3]{5x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. (7 pont) Legyen $f(x)=2/x$ és $g(x)=3-x-\sin(\pi x)$. A két függvény grafikonjának két metszéspontja van, a szinusz értéke mindkét metszéspontban 0. Keressük meg ezt a két metszéspontot, majd integrálással számoljuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet ezen két metszéspont között az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai határolnak.

Számítási feladatok

4. (a) (2 pont) Adottak az $\underline{u}_1=(1,2,3)$ és $\underline{u}_2=(3,-3,1)$ egymásra merőleges vektorok. Válasszunk egy olyan $\underline{u}_3$ vektort, amely merőleges $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is, és számoljuk ki $\underline{u}_3$ koordinátáit.

   (b) (3 pont) Legyen $\underline{v}=(18,-5,-12)$. Állítsuk elő a $\underline{v}$ vektort az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ bázisban az alábbiak szerint. Bontsuk fel $\underline{v}$-t az $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. Ezután a merőleges komponenst bontsuk fel $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

5. (5 pont) Számítsuk ki az
$$a_n=\left(\frac{(2n-1)(n+3)-2n^2}{n^2-(n-1)(n-4)}\right)^n$$
sorozat határértékét.

6. (5 pont) Legyen $f(x)=2x^3+x^2-3x+3$. Keressük meg azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonjának érintőegyenese merőleges az $x+y=3$ egyenesre. Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét ezekben a pontokban.

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Hány megoldása lehet egy három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek? Mit mondhatunk az együtthatómátrix determinánsáról az egyes esetekben?

   (b) (3 pont) Adjuk meg az $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen. A megoldásokat nem kell kiszámolni.
$$\begin{aligned}2x+11y&=7\\2x+6y-20z&=2\\x+5y+az&=b\end{aligned}$$

8. (a) (2 pont) Egy $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra alkalmazható lineáris transzformáció mátrixa hogyan írható fel $\mathbb{R}^3$ bázisvektorainak képeivel?

   (b) (1 pont) Mi három $\mathbb{R}^3$-beli vektor vegyes szorzatának geometriai jelentése?

   (c) (3 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$-vel forgat (az x tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi), a z irányban pedig kétszeresére nyújt. Számítsuk ki a bázisvektorok képeinek vegyes szorzatát.

9. (a) (2 pont) A differenciálható $f(x)$ függvény esetén adjunk szükséges feltételt az x_0-ban lokális szélsőérték létezésére.

   (b) (2 pont) A kétszer differenciálható $f(x)$ függvény esetén adjunk elégséges feltételt az x_0-ban lokális szélsőérték létezésére.

   (c) (2 pont) Az $f(x)=x^4+4x^3+5$ függvény esetén mely pontokban teljesül a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó szükséges feltétel? Ezek közül hol teljesül a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó elégséges feltétel?