Matematika EP1 vizsga, 2024. dec. 16. megoldása

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

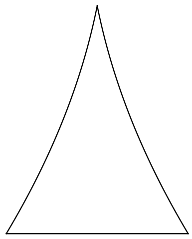
1. (7 pont) Az
$$\int e^x \sin(\pi - e^x)\,\mathrm{d}x$$
integrálban végezzük el az $u = e^x$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált, majd fejezzük ki az eredményt az eredeti x változóval.

   Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x$, 2p ezért
$$\int e^x \sin(\pi - e^x)\,\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \int \sin(\pi - u)\,\mathrm{d}u \overset{1p}{=} \cos(\pi - u) + c \overset{1p}{=} \cos(\pi - e^x) + c.$$

2. (7 pont) Mennyi az
$$\int_0^1 \frac{3x^3 - 5x^2 + x - 4}{x - 2}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int_0^1 \frac{3x^3 - 5x^2 + x - 4}{x - 2}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int_0^1 \left(3x^2 + x + 3 + \frac{2}{x - 2}\right)\mathrm{d}x \overset{2p}{=} \left[x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 2\ln|x - 2|\right]_0^1 \overset{1p}{=} \frac{9}{2} - 2\ln 2.$$

3. (7 pont) A feldíszített karácsonyfa forgástest alakú, vízszintes keresztmetszete $2 - x$ méter magasságban $f(x) = \frac{x^2+2x}{10}$ sugarú kör, ha $x \in [0, 2]$. Az ábrán a fa függőleges keresztmetszete látható. Integrálással számoljuk ki a karácsonyfa térfogatát, azaz annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $f(x)$ függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával kapunk a $[0, 2]$ intervallumon. Az eredményt a behelyettesítés után nem kell tovább egyszerűsíteni.



   Megoldás: A keresett térfogat értéke
$$\begin{aligned}
\pi \int_0^2 (f(x))^2\,\mathrm{d}x &\overset{3p}{=} \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2 + 2x}{10}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{1p}{=} \frac{\pi}{100} \int_0^2 \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{2p}{=} \frac{\pi}{100} \left[\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 \\
&\overset{1p}{=} \frac{\pi}{100} \left(\frac{32}{5} + 16 + \frac{32}{3}\right) \\
&= \frac{124\pi}{375}
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. (5 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval a
$$\begin{aligned}
3x - 8y + 4z &= 5 \\
2x - y + 7z &= 12 \\
x - y + 3z &= 5
\end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszert.

   Megoldás: A 3. sor előrehozásával
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 12 \\ 3 & -8 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array}\right] \overset{3p}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
ahonnan $z = t$ szabad paraméter, a második egyenletből $y = 2 - t$, az első egyenletből pedig $x = 7 - 4t$. 2p

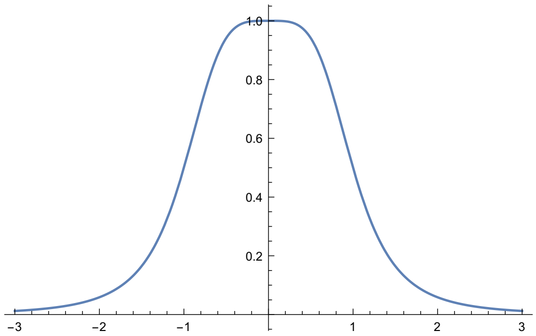
5. (5 pont) Mennyi a $3x + 2y - z = 3$ sík és az $Q = (7, 4, -4)$ pont távolsága?

Megoldás: A sík egyenletét átírva $3(x-1) + 2y - z = 0$, 1p amelybe a pont koordinátáit behelyettesítve a távolság 3p

$$\frac{3 \cdot (7-1) + 2 \cdot 4 - (-4)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} \overset{1p}{=} \frac{30}{\sqrt{14}}$$

6. (5 pont) Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Megoldás: Az adott $f(x)$ függvény értelmezett minden $x \in \mathbb{R}$-re. A derivált $f'(x) = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$, amely $x = 0$-ra lesz 0. 1p A második derivált $f''(x) = \frac{4x^2(5x^4-3)}{(1+x^4)^3}$, amely $x = 0$ és $x = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$ esetén lesz 0. 1p Ezért a függvény a $(-\infty, 0)$-n monoton nő, 0-ban lokális maximuma van, a $(0, \infty)$-en monoton csökken. 1p A függvény a $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)$-ön konvex, a $\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{5}}, \sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)$-ön konkáv, a $\left(\sqrt[4]{\frac{3}{5}}, \infty\right)$-en konvex, $\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$-ben inflexiós pontjai vannak, de 0-ban nem. 1p A függvény grafikonja: 1p



Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Milyen tulajdonságokkal értelmezzük két $\mathbb{R}^3$-beli vektor vektoriális szorzatát (hossz, irány, állás)?

   (b) (3 pont) Számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok vektoriális szorzatát, majd skaláris szorzással ellenőrizzük az irányra vonatkozó feltételt ebben az esetben.

Megoldás:

(a) $\underline{u} \times \underline{v}$ merőleges $\underline{u}$-ra és $\underline{v}$-re, 1p hossza $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\alpha$, ahol α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ hajlásszöge, 1p az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u} \times \underline{v}$ vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak. 1p

(b)

$$\underline{u} \times \underline{v} \overset{1p}{=} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{1p}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

amelyre $\langle \underline{u} \times \underline{v}, \underline{u} \rangle = -4 \cdot 3 - 1(-2) + 5 \cdot 2 = 0$ és $\langle \underline{u} \times \underline{v} \rangle = -4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 0$. 1p

8. (a) (3 pont) Mit jelent az, hogy az a_n sorozat határértéke egy A valós szám?

   (b) (3 pont) Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$$

sorozat határértékét, majd a határérték definíciója alapján adjunk meg egy $\varepsilon = \frac{1}{10}$ értékhez tartozó küszöbindexet.

Megoldás:

(a) Ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik n_0, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n \geq n_0$-ra. 3p

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$, 1p ezért

$$\left|\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n-2-(6n+9)}{2(2n+3)}\right| = \frac{11}{2(2n+3)} \overset{1p}{<} \frac{1}{10}$$

ahonnan $n > 26$ adódik. 1p

9. (a) (3 pont) Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt.
   (b) (3 pont) Az $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvénynek adjuk meg két különböző primitív függvényét, majd számoljuk ki az f függvény határozott integrálját a $[-1, 1]$ intervallumon kétféleképpen ezen primitív függvényekkel.

Megoldás:

(a) Ha $f(x)$ folyonos $[a, b]$-n és primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).\ \color{red}{3p}$$

(b) Az adott $f(x)$ összes primitív függvénye $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c$, ezért minden $c \in \mathbb{R}$-re

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 3x + 1)\,\mathrm{d}x \overset{\color{red}{1p}}{=} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + c\right]_{-1}^{1} \overset{\color{red}{1p}}{=} \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 + c - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + (-1) + c\right) \overset{\color{red}{1p}}{=} \frac{8}{3}$$