Matematika EP1 vizsga megoldása, 2025. jan. 10.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) Végezzünk parciális integrálást az

$$\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

integrálban. Ehhez először bontsuk szorzattá az x^3 tényezőt úgy, hogy megjelenjen a $\sqrt{x^2+1}$ összetett függvény belső függvényének a deriváltja. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{x^2+1}$ és a belső függvény deriváltjának szorzata éppen egy alkalmas összetett függvény deriváltja. Ezt a deriváltat válasszuk a parciális integrálásnál az egyik tényezőnek.

Megoldás: A $\sqrt{x^2+1}$ belső függvényének deriváltja $(x^2+1)' = 2x$, 1p ezért a parciális integrálásban a tényezőket válasszuk a következőképpen: $f'(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot 2x$ és $g(x) = \frac{x^2}{2}$, amelyhez $f(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ és $g'(x) = x$. 1p Így parciális integrálással

$$\begin{aligned}\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &\overset{3p}{=} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} - \int x\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{2p}{=} \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5/2} + c \\ &= \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

2. (7 pont) Mennyi az

$$\int_{-\pi/4}^{0}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

Megoldás: Felismerve, hogy $(\cos x)' = -\sin x$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{0}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} - \ln|\cos x|\right]_{-\pi/4}^{0} \\ &= \left[\frac{1}{\cos x} - \ln|\cos x|\right]_{-\pi/4}^{0} \\ &= 1 - \ln 1 - \left(\sqrt{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

felhasználva, hogy $\cos 0 = 1$ és $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 4+3p

3. (7 pont) Integrálással számoljuk ki az $r(\varphi) = 3e^{4\varphi/3}$ polárkoordinátásan adott spirálgörbe $\varphi \in [0,1]$ darabjának ívhosszát.

Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 4e^{4\varphi/3}$, 1p ezért a keresett ívhossz 2p

$$\int_0^1 \sqrt{\left(3e^{4\varphi/3}\right)^2 + \left(4e^{4\varphi/3}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi \overset{2p}{=} \int_0^1 5e^{4\varphi/3}\,\mathrm{d}\varphi \overset{1p}{=} \left[5\frac{e^{4\varphi/3}}{4/3}\right]_0^1 \overset{1p}{=} \frac{15}{4}\left(e^{4/3}-1\right).$$

Számítási feladatok

4. (5 pont) Írjuk fel a térben az $A = (0,0,4)$, $B = (1,0,8)$, $C = (6,3,1)$ pontok által meghatározott sík egyenletét.

Megoldás: Felírva az $\overrightarrow{AB} = (1,0,4)$ és $\overrightarrow{AC} = (6,3,-3)$ 1p vektorokat, a keresett sík normálvektorának választható 1p

$$\overrightarrow{AB}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} \overset{1p}{=} \begin{pmatrix}-4\\9\\1\end{pmatrix},$$

amellyel az A ponton átmenő sík egyenletét felírva kapjuk, hogy $-4x + 9y + z = 4$. 2p

5. (5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{(n+3)(n-1)-n^2}{3n-5}\right)^{3-2n}$$

sorozat határértéke?

Megoldás: Az alap határértéke

$$b_n \frac{(n+3)(n-1)-n^2}{3n-5} = \frac{2n-3}{3n-5} \overset{2p}{\to} \frac{2}{3} < 1$$

ezért írható, hogy $a_n = ((b_n)^{-1})^{2n-3}$, ahol $(b_n)^{-1} \to \frac{3}{2} > 1$, ezért $a_n \to \infty$. 3p

6. (5 pont) Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 6 cm. Mekkorák a háromszög oldalai, ha az oldalakra írt félkörök területeinek összege a lehető legkisebb?

Megoldás: Jelölje x a két egyenlő oldal hosszát cm-ben. Ekkor a harmadik oldal hossza $6-2x$ cm. Egy x hosszú oldalra írt félkör területe $\frac{\pi}{8}x^2$, a $6-2x$ hosszú oldalra írt félköré $\frac{\pi}{2}(3-x)^2$. Ezért a minimalizálandó területösszeg $f(x) = 2\cdot\frac{\pi}{8}x^2 + \frac{\pi}{2}(3-x)^2 = \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}(3-x)^2$. 2p A kifejezés deriváltja $f'(x) = \frac{\pi}{2}x + \pi(3-x)(-1)$, 1p amely akkor 0, ha $x = 2$. 1p A kifejezés második deriváltja $f''(x) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi > 0$, ezért $x = 2$-ben valóban minimum van. 1p

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Egy V vektortérben mit jelent, hogy az $U \subseteq V$ részhalmaz alteret alkot?
   (b) (3 pont) A $V = \mathbb{R}^3$ vektortérben alteret alkotnak-e az $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ és az $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$ részhalmazok? A választ röviden indokoljuk.

   Megoldás:

   (a) U akkor altér, ha maga is vektortér, azaz ha nem vezetnek ki belőle a műveletek. 3p

   (b) U_1 altér, mert ha $\underline{u}_1 = (x_1, 0, z_1), \underline{u}_2 = (x_2, 0, z_2) \in U_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (x_1+x_2, 0, z_1+z_2) \in U_1$ és $\lambda\underline{u}_1 = (\lambda x_1, 0, \lambda z_1) \in U_1$. U_2 nem altér, mert pl. $\underline{u} = (0,1,0) \in U_2$, de $2\underline{u} = (0,2,0) \notin U_2$. 2+1p

8. (a) (3 pont) Mondjuk ki a függvények határértékére vonatkozó L'Hospital-szabályt.
   (b) (3 pont) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$$

   határértéket.

   Megoldás:

   (a) Ha $f(x)$ és $g(x)$ az x_0 egy környezetében differenciálható függvények, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ vagy $|\lim_{x\to x_0} f(x)| = |\lim_{x\to x_0} g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ az x_0 egy környezetében, továbbá létezik a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor létezik a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is, és $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 3p

   (b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x} \overset{2p}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}}{1} \overset{1p}{=} -\frac{1}{2}$$

9. (a) (3 pont) Adott egy $f(x)$ korlátos függvény az $[a,b]$ intervallumon és adott az $[a,b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ felosztása. Értelmezzük az ezekhez tartozó alsó és felső integrálközelítő összegeket.
   (b) (3 pont) Számoljuk ki az $f(x) = x^3$ függvényhez és a $[0,10]$ intervallum azon felosztásához tartozó alsó és felső integrálközelítő összegeket, amelyben az osztópontok az egész számok ($x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_9 = 9, x_{10} = 10$). A közelítő összegeket hasonlítsuk össze a megfelelő határozott integrál értékével. Felhasználható a köbszámok összegére vonatkozó $1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 = 2025$ összefüggés.

   Megoldás:

   (a) Az adott $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ felosztáshoz tartozó $s(P)$ alsó és $S(P)$ felső közelítő összegeket az

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}), \qquad S(P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$$

   formulákkal értelmezzük. 2+1p

   (b) Az adott függvény és felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg $s(P) = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 = 2025$, 1p a megfelelő felső közelítő összeg pedig $S(P) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = 2025 + 10^3 = 3025$. 1p A függvény határozott integrálja $\int_0^{10} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{10000}{4} = 2500$, 1p amely az alsó és felső közelítő összegek közé esik.