Matematika EP1 vizsga megoldása, 2025. jan. 17.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) Végezzük el az

$$\int \frac{4x^3+8x^2-3x+5}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

integrálást.

Megoldás: A maradékos polinomosztás elvégzése után

$$\int \frac{4x^3+8x^2-3x+5}{2x-1}\,\mathrm{d}x \overset{4p}{=} \int \left(2x^2+5x+1+\frac{6}{2x-1}\right)\mathrm{d}x \overset{3p}{=} \frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+x+3\ln|2x-1|+c$$

2. (7 pont) Mennyi az

$$\int_0^2 \left(\frac{4\sinh x}{(\cosh x+1)^5} - \left(\frac{x^3\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

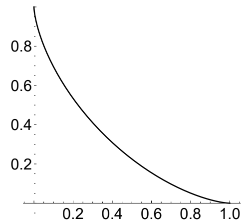
határozott integrál értéke?

Megoldás: Felismerve, hogy $(\cosh x+1)' = \sinh x$ és alkalmazva, hogy $2(3+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}) = \frac{20}{3}$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\frac{4\sinh x}{(\cosh x+1)^5} - \left(\frac{x^3\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}\right)^2\right)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left((\cosh x+1)^{-5}4\sinh x - x^{20/3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{(\cosh x+1)^4} - \frac{3}{23}x^{23/3}\right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{(\cosh 2+1)^4} - \frac{3}{23}2^{23/3} + \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

4+3p

3. (7 pont) A szektortartomány területére vonatkozó integrálképlet segítségével számoljuk ki az $x(t)=\cos^3 t$, $y(t)=\sin^3 t$, $t\in[0,\pi/2]$ paraméterezéssel adott asztroidgörbe és a koordinátatengelyek által meghatározott területet. A kapott integrál kiszámításánál használjuk a $\sin^2 t\cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t = \frac{1}{8}(1-\cos 4t)$ összefüggést.



Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 3\cos^2 t(-\sin t)$ és $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 3\sin^2 t\cos t$, 2p ezért a keresett terület 1p

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left|\sin^3 t3\cos^2 t(-\sin t) - \cos^3 t3\sin^2 t\cos t\right|\mathrm{d}t &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\left|\sin^4 t\cos^2 t+\sin^2 t\cos^4 t\right|\mathrm{d}t \\
&\overset{1p}{=} \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&\overset{1p}{=} \frac{3}{16}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{1p}{=} \frac{3}{16}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&\overset{1p}{=} \frac{3\pi}{32}
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. (5 pont) Adottak az

$$e = \begin{cases} x = 3t-2 \\ y = 5-2t \\ z = t-1 \end{cases} \qquad f = \begin{cases} x = t-3 \\ y = 5t+2 \\ z = 1-3t \end{cases}$$

egyenesek a térben. Írjuk fel az e egyenet tartalmazó és f-fel párhuzamos sík egyenletét. Van-e az e és f egyeneseknek metszéspontja?

Megoldás: A keresett sík normálvektora választható a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzataként

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{2p}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

amellyel az e egyenes $(-2,5,-1)$ pontján átmenő sík egyenlete $x+10y+17z=31$. 1p Mivel az f egyenes $(-3,2,1)$ pontjára az egyenlet bal oldalát felírva $-3+10\cdot 2+17\cdot 1=34$, ezért az f egyenes nem metszi a fenti síkot, így az e egyenest sem. 2p

5. (5 pont) Adjuk meg a $p\in\mathbb{R}$ valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos(5x)}{7x^2} & \text{ha } x>0\\ 2+p(x+1)^2 & \text{ha } x\le 0\end{cases}$$

függvény folytonos legyen minden $x\in\mathbb{R}$-re.

Megoldás: A függvény nyilvánvalóan folytonos minden $x\neq 0$ esetén. A 0-beli folytonossághoz a határértékek egyezését ellenőrizzük. Ehhez alkalmazva az $1-\cos(5x)=\sin^2(5x/2)+\cos^2(5x/2)-(\cos^2(5x/2)-\sin^2(5x/2))=2\sin^2(5x/2)$ azonosságot,

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin^2(5x/2)}{7x^2}=\frac{25}{14}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2(5x/2)}{(5x/2)^2}\overset{3p}{=}\frac{25}{14}$$

eredményt kapjuk. Másrészt behelyettesítéssel $f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x)=2+p$, 1p amelyből $p=-3/14$ adódik. 1p

6. (5 pont) Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0=0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x)=3-x-2x^2+e^{-2x}$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Megoldás: Mivel $f'(x)=-1-4x-2e^{-2x}$, $f''(x)=-4+4e^{-2x}$, $f'''(x)=-8e^{-2x}$, 2p behelyettesítve $f(0)=4$, $f'(0)=-3$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-8$, 2p ezért a keresett polinom a $4-3x-\frac{4}{3}x^3$. 1p

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Mit jelent, hogy néhány vektor bázist alkot a V vektortérben?
   (b) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1,2,3)$, $(3,2,1)$ vektorok?
   (c) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(1,0,0)$ vektorok?
   (d) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ vektorok?

   A válaszokat röviden indokoljuk.

   Megoldás:

   (a) A $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ vektorok bázist alkotnak a V vektortérben, ha bármely $\underline{v}\in V$ vektor egyértelműen előállítható $\underline{v}=\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\cdots+\lambda_n\underline{v}_n$ lineáris kombinációként, ahol $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. 3p
   (b) Nem, mert $\mathbb{R}^3$ minden bázisa háromelemű. 1p
   (c) Igen, pl. a három vektorból képzett determinánssal ellenőrizhető:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&0&0\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

   miatt bázist alkotnak. 1p
   (d) Nem, mert $\mathbb{R}^3$ minden bázisa háromelemű. 1p

8. (a) (3 pont) Egy valós számsorozat esetén értelmezzük a monoton, korlátos és konvergens fogalmakat. (Adjuk meg a határérték definícióját is.)
   (b) (3 pont) Ha van, adjunk példát olyan sorozatra, amely
      A monoton és korlátos, de nem konvergens;
      B monoton és konvergens, de nem korlátos;
      C korlátos és konvergens, de nem monoton.

   Ha nincs ilyen sorozat, röviden indokoljuk.

   Megoldás:

   (a) Az (a_n) sorozat monoton, ha $a_{n+1}\geq a_n$ minden n-re vagy $a_{n+1}\leq a_n$ minden n-re. 1p Az (a_n) sorozat korlátos, ha vannak olyan $K,L\in\mathbb{R}$ korlátok, hogy $K\leq a_n\leq L$ minden n-re. 1p Az (a_n) sorozat konvergens, ha van véges határértéke, azaz van olyan A, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz létezik n_0, hogy $|a_n-A|<\varepsilon$ minden $n\geq n_0$ esetén. 1p
   (b) A Nincs ilyen sorozat, mert monoton és korlátos sorozat mindig konvergens. 1p
      B Nincs ilyen sorozat, mert konvergens sorozat mindig korlátos. 1p
      C Pl. $a_n=(-1)^n/n$. 1p

9. (a) (2 pont) Mondjuk ki a Rolle-féle középértéktételt.

(b) (4 pont) Alkalmazható-e a tétel a $[0, 1]$ intervallumon az

$$f(x) = \mathrm{tg}(\pi x), \qquad g(x) = \sin(\pi x), \qquad h(x) = \cos(\pi x), \qquad i(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

függvényekre? Ha igen, keressük meg a tétel által garantált pontot. Ha nem, mutassuk meg, hogy a tétel melyik feltétele nem teljesül.

Megoldás:

(a) Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az (a, b) intervallumon, továbbá $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$. 2p

(b) Az $f(x)$ függvény nem értelmezett $x = 1/2$-ben. 1p A $g(x)$ függvényre alkalmazható a tétel. Mivel $g'(x) = \pi \cos(\pi x)$, ezért az $x = 1/2$-ben $g'(1/2) = 0$ teljesül. 1p A $h(0) = 1$, $h(1) = -1$ miatt nem alkalmazható. 1p Az $i(x)$ függvény pedig nem differenciálható $x = 1/2$-ben. 1p