Matematika EP1 vizsga megoldása, 2025. jan. 24.

A sikeres vizsgához az integrálási feladatokból legalább 6 pontot, összesen pedig legalább 20 pontot el kell érni.

Integrálási feladatok

1. (7 pont) A parciális integrálás kétszeri alkalmazásával végezzük el az

$$\int x^2 e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x$$

integrálást.

Megoldás: Először $f(x) = x^2$ és $g'(x) = e^{-3x+1}$ választással $f'(x) = 2x$ és $g(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$, 1p ahonnan

$$\int x^2 e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} -\frac{x^2}{3}e^{-3x+1} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x$$

majd a kapott integrálban $f(x) = x$ és $g'(x) = e^{-3x+1}$ választással $f'(x) = 1$ és $g(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$, vagyis

$$\int x^{-3x+1}\,\mathrm{d}x \overset{2p}{=} -\frac{x}{3}e^{-3x+1} + \frac{1}{3}\int e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x \overset{1p}{=} -\frac{x}{3}e^{-3x+1} - \frac{1}{9}e^{-3x+1} + c$$

amit behelyettesítve

$$\int x^2 e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x \overset{1p}{=} \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right)e^{-3x+1} + c.$$

2. (7 pont) Mennyi az

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x+2} + \frac{10x}{\sqrt[3]{5x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x+2} + \frac{10x}{\sqrt[3]{5x^2+1}}\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{3}{x+2} + (5x^2+1)^{-1/3}10x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[x - 3\ln|x+2| + \frac{3}{2}(5x^2+1)^{2/3}\right]_{-1}^{1} \\
&= 1 - 3\ln 3 + \frac{3}{2}\cdot 6^{2/3} - \left(-1 - 0 + \frac{3}{2}\cdot 6^{2/3}\right) \\
&= 2 - 3\ln 3
\end{aligned}$$

4+3p

3. (7 pont) Legyen $f(x) = 2/x$ és $g(x) = 3 - x - \sin(\pi x)$. A két függvény grafikonjának két metszéspontja van, a szinusz értéke mindkét metszéspontban 0. Keressük meg ezt a két metszéspontot, majd integrálással számoljuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet ezen két metszéspont között az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai határolnak.

Megoldás: A két metszéspont a $2/x = 3 - x$ két megoldása, ami $x = 1$ és $x = 2$. 1p Ezért a keresett terület 2p

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2}\left(3 - x - \sin(\pi x) - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x &\overset{2p}{=} \left[3x - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} - 2\ln|x|\right]_{1}^{2} \\
&\overset{1p}{=} 6 - 2 + \frac{1}{\pi} - 2\ln 2 - \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) \\
&\overset{1p}{=} \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} - 2\ln 2
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. (a) (2 pont) Adottak az $\underline{u}_1 = (1, 2, 3)$ és $\underline{u}_2 = (3, -3, 1)$ egymásra merőleges vektorok. Válasszunk egy olyan $\underline{u}_3$ vektort, amely merőleges $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is, és számoljuk ki $\underline{u}_3$ koordinátáit.

   (b) (3 pont) Legyen $\underline{v} = (18, -5, -12)$. Állítsuk elő a $\underline{v}$ vektort az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ bázisban az alábbiak szerint. Bontsuk fel $\underline{v}$-t az $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. Ezután a merőleges komponenst bontsuk fel $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

Megoldás:

(a)

$$\underline{u}_3 \overset{1p}{=} \underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{1p}{=} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(b) Mivel $\langle \underline{u}_1, \underline{v} \rangle = 1 \cdot 18 + 2(-5) + 3(-12) = -28$ és $\|\underline{u}_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, ezért az $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos komponens $-2\underline{u}_1 = (-2, -4, -6)$, a merőleges pedig $\underline{w} = \underline{v} - (-2\underline{u}_1) = (20, -1, -6)$. 2p A kapott $\underline{w}$ vektor felbontásához pedig $\langle \underline{u}_2, \underline{w} \rangle = 3 \cdot 20 - 3(-1) + 1(-6) = 57$ és $\|\underline{u}_2\|^2 = 3^2 + 3^2 + 1 = 19$, ahonnan az $\underline{u}_2$-vel párhuzamos komponens $3\underline{u}_2 = (9, -9, 3)$, a merőleges (egyben $\underline{u}_3$-mal párhuzamos) pedig $\underline{w} - 3\underline{u}_2 = (11, 8, -9) = \underline{u}_3$. 1p

5. (5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(2n-1)(n+3) - 2n^2}{n^2 - (n-1)(n-4)} \right)^n$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Mivel

$$\frac{(2n-1)(n+3) - 2n^2}{n^2 - (n-1)(n-4)} \overset{1p}{=} \frac{5n-3}{5n-4} \overset{2p}{=} 1 - \frac{1}{5n-4},$$

továbbá $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{5n-4} \cdot n = -\frac{1}{5}$, 1p ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/5}$. 1p

6. (5 pont) Legyen $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 3$. Keressük meg azokat a pontokat, ahol a függvény grafikonjának érintőegyenese merőleges az $x + y = 3$ egyenesre. Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét ezekben a pontokban.

Megoldás: Deriválással $f'(x) = 6x^2 + 2x - 3$. Az $x + y = 3$ egyenes meredeksége -1, ezért olyan x pontokat keresünk, ahol a $f'(x) = 1$, vagyis a $6x^2 + 2x - 3 = 1$ egyenletet oldjuk meg. 2p A megoldások $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = -1$. 1p Mivel $f(x_1) = \frac{55}{27}$ és $f(x_2) = 5$, továbbá a megoldott egyenlet miatt $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$, ezért a két keresett érintő egyenlete $y = \frac{55}{27} + x - \frac{2}{3} = x + \frac{37}{27}$ és $y = 5 + x + 1 = x + 6$. 2p

Elméleti feladatok

7. (a) (3 pont) Hány megoldása lehet egy három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek? Mit mondhatunk az együtthatómátrix determinánsáról az egyes esetekben?

(b) (3 pont) Adjuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen. A megoldásokat nem kell kiszámolni.

$$\begin{aligned} 2x + 11y &= 7 \\ 2x + 6y - 20z &= 2 \\ x + 5y + az &= b \end{aligned}$$

Megoldás:

(a) A megoldások száma nulla, egy vagy végtelen lehet. Nulla vagy végtelen sok megoldás esetén az együtthatómátrix determinánsa nulla, egy megoldás esetén nem nulla.

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 11 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & -20 & 2 \\ 1 & 5 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{11}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & -5 & -20 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & a & b - \frac{7}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{11}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & b-3 \end{array}\right]$$

Akkor lesz végtelen sok megoldás, ha $a = -2$ és $b = 3$

8. (a) (2 pont) Egy $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra alkalmazható lineáris transzformáció mátrixa hogyan írható fel $\mathbb{R}^3$ bázisvektorainak képeivel?

(b) (1 pont) Mi három $\mathbb{R}^3$-beli vektor vegyes szorzatának geometriai jelentése?

(c) (3 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$-vel forgat (az x tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi), a z irányban pedig kétszeresére nyújt. Számítsuk ki a bázisvektorok képeinek vegyes szorzatát.

Megoldás:

(a) A mátrix oszlopai az $\mathbb{R}^3$ standard bázisvektorainak képei.

(b) A vektorok által feszített paralelepipedon előjeles térfogata.

(c) A transzformáció mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A képek vegyes szorzata a fenti mátrix determinánsa, ami 2.

9. (a) (2 pont) A differenciálható $f(x)$ függvény esetén adjunk szükséges feltételt az x_0-ban lokális szélsőérték létezésére.

(b) (2 pont) A kétszer differenciálható $f(x)$ függvény esetén adjunk elégséges feltételt az x_0-ban lokális szélsőérték létezésére.

(c) (2 pont) Az $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5$ függvény esetén mely pontokban teljesül a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó szükséges feltétel? Ezek közül hol teljesül a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó elégséges feltétel?

Megoldás:

(a) $f'(x_0) = 0$

(b) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$ esetén lokális minimum van x_0-ban, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$ esetén pedig lokális maximum.

(c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 + 24x$, a szükséges $f'(x_0) = 0$ feltétel $x_0 = 0$-ban és $x_0 = -3$-ban teljesül. $f''(0) = 0$, azaz $x_0 = 0$-ban az elégséges feltétel nem teljesül (nincs is szélsőérték). $f''(-3) = 36$, azaz $x_0 = -3$-ban a teljesül az elégséges feltétel, és lokális minimum van.