

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2024. jún. 7.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az

$$\int \frac{4x^3 - 7x + 1}{2x - 3} dx$$

integrált.

2. Mennyi az

$$\int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x^{3/2}} \right)^4 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki az $f(x) = 2x^{3/2}$ függvény grafikonjának ívhosszát az $[1, 2]$ intervallum fölött.

Számítási feladatok

4. Adott az

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 5 - 3t \\ z = t - 3 \end{cases}$$

egyenes és a $P = (2, 1, -3)$ pont a térben. Számoljuk ki az egyenes és a pont távolságát az alábbiak szerint. Először írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az egyenesre, és átmegegy a P ponton. Határozzuk meg a sík és az egyenes M metszéspontját. (A kapott M pont az egyenesnek a P -hez legközelebbi pontja.) Az M és P távolsága megegyezik az egyenes és P távolságával.

5. Jelölje A az yz síkra való merőleges vetítés mint \mathbb{R}^3 térbeli lineáris transzformáció mátrixát, B pedig a z tengely körüli $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixát, amely az x tengely pozitív felét az y tengely negatív felébe viszi. Írjuk fel az A és B transzformációmátrixokat. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektoron mátrixszorzás segítségével ellenőrizzük, hogy először az A majd a B transzformációt elvégezve más eredményt kapunk, mint fordított sorrendben.

6. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n(n+2)}{(n-1)^2} \right)^{1-2n^2}$$

sorozat határértéke?

Elméleti feladatok

7. (a) Tekintsük adotttnak az \mathbb{R}^3 térben a \underline{v} vektort és az origón átmenő S sík egyenletét. Hogyan állítható elő \underline{v} az S síkba eső és rá merőleges komponensek összegeként? Segítség: mi az S sík normálvektorának viszonya a keresett komponensekkel?
(b) Mik a keresett komponensek a $\underline{v} = (5, 4, 9)$ vektor és $2x - y + 4z = 0$ sík esetén?
8. (a) Hogyan értelmezzük egy $f(x)$ függvény folytonosságát egy x_0 pontban?
(b) Írjuk le a folytonos függvényekkel végzett alapl műveletek ill. összetétel segítségével kapott függvény folytonosságára vonatkozó tételt.
(c) Az \mathbb{R} száme egyenes mely pontjaiban folytonos az alábbi két függvény?

$$f(x) = \frac{e^x - 8x^2 + 3}{1 - \cos(\pi x)}, \quad g(x) = \frac{\ln(2x+1) - 2\ln(3-x)}{x^2 - 3x + 2}$$

9. (a) Mit jelent az, hogy két függvény n -edrendben érinti egymást egy x_0 pontban?
(b) Hogyan definiálható egy adott függvény x_0 -ban felírt n -edfokú Taylor-polinomja az n -edrendű érintés segítségével? (A Taylor-polinom formulájára nem jár pont, a Taylor-polinom definiáló tulajdonsága a kérdés.)
(c) Írjuk fel az $f(x) = x(e^x - x + x^2)$ függvény harmadfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pontban.

Minden feladat 7 pontos.