

Név:
Neptun-kód:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| ZH | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | V | Σ | jegy |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|

Matematika EP1 vizsga, 2024. jún. 14.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás alkalmazásával számítsuk ki az

$$\int (2x + 1) \sin(\pi x) dx$$

integrált.

2. Mennyi az

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{x+1}{x+2} + \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Forgassuk meg az $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ paraméteresen adott cikloisgörbe $t \in [0, 2\pi]$ paraméterekhez tartozó darabját az x tengely körül. Integrálással számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát. Segítség: a képletgyűjteményben található formulába való behelyettesítés után bontsuk fel a zárójeleket, és a kapott tagokat külön-külön integráljuk. Használjuk a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ és a $\cos^3 t = \cos t(1 - \sin^2 t)$ összefüggéseket.

Számítási feladatok

4. Adott a térben az $5x + 2y - 3z = 7$ egyenletű sík és az

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenes. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely teljes egészében benne fekszik a síkban, és amely merőlegesen metszi a fenti egyenest. Segítség: a keresett egyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára és az adott egyenes irányvektorára is.

5. Mennyi az

$$a_n = \frac{1^{3n-2} + 3^{2-n} - 4^{n-3}}{2^{3-n}(11n^3 - 3^n) + 2^{2n+1} - 5n^9}$$

sorozat határértéke?

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Egy V vektortérben mikor mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok bázist alkotnak?
(b) Bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$ vektorok? A választ indokoljuk.
(c) Bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (4, 3, 2)$ vektorok? A választ indokoljuk.
(d) Bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 3, 4)$ vektorok? A választ indokoljuk.
8. (a) Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt.
(b) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

függvényhatárértéket.

9. (a) Legyen $f(x)$ korlátos függvény az $[a, b]$ intervallumon. Legyen adott az $[a, b]$ intervallum egy felosztása az $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ osztópontokkal. Mit értünk az $\int_a^b f(x) dx$ integrál alsó és felső közelítőösszegein a fenti felosztás esetén?
(b) Számoljuk ki az $f(x) = x$ függvény, $[a, b] = [0, 4]$ intervallum és a $0, 1, 2, 3, 4$ osztópontok által definiált felosztás esetén az alsó és felső integrálközelítő összegeket, majd hasonlítsuk össze az eredményt az integrál értékével.

Minden feladat 7 pontos.