Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2024. jún. 28.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$$
integrálban végezzük el az $u = e^x$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált, majd fejezzük ki az eredményt az eredeti x változóval.

2. Mennyi az
$$\int_0^3 \frac{4x-6}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással számoljuk ki azon síkidom tömegközéppontjának koordinátáit, amelyet az x tengely és az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjának $x \in [0, \pi]$ szakasza határolnak.

   Segítség: a képletgyűjteményben található formulába való behelyettesítés után végezzünk parciális integrálást ill. alkalmazzuk a $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ azonosságot.

Számítási feladatok

4. Adottak a térben az $A = (2, -2, 3)$, $B = (4, 0, 0)$, $C = (3, -3, 5)$ pontok.
   (a) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely mindhárom pontot tartalmazza.
   (b) Keressük meg azt a D pontot, amellyel az $ABDC$ négyszög paralelogramma, és amelyben a csúcsok a négyszög kerülete mentén ilyen sorrendben következnek.

5. A 2π térfogatú hengerek közül keressük meg azt, amelyiknek a legkisebb a felszíne. Mekkora az alapkör sugara és a magasság?

6. Keressük meg azt a negyedfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban negyedrendben érinti az $f(x) = \cos(\pi(x+1))$ függvényt, azaz f negyedfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Elméleti feladatok

7. Tekintsük a
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 5 \\ y + 3z &= 3 \end{aligned}$$
egyenleteket az x, y, z ismeretlenekre. Egészítsük ki ezt egy-egy további egyenlettel úgy, hogy a kapott három egyenletből álló egyenletrendszernek
   (a) ne legyen megoldása.
   (b) pontosan egy megoldása legyen.
   (c) végtelen sok megoldása legyen.

   A megoldásokat nem kell kiszámolni.

8. (a) Mit jelent, hogy az a_n sorozatnak az $A \in \mathbb{R}$ szám a határértéke?
   (b) Számoljuk ki az
$$a_n = \frac{2n+3}{n-1}$$
sorozat határértékét, majd a határérték definíciója alapján adjunk meg egy $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

9. (a) Legyen $f(x)$ kétszer differenciálható függvény $\mathbb{R}$-en. A második derivált segítségével hogyan garantálható, hogy az (a, b) intervallumon konvex, a (c, d) intervallumon pedig konkáv legyen az $f(x)$ függvény?
   (b) Az $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 7x + 15$ függvény mely intervallumokon konvex ill. konkáv?

Minden feladat 7 pontos.