

Feladatmegoldó szeminárium 1.

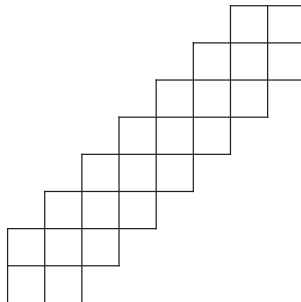
1. óra

2013. 09. 11.

1. Egy sakktábla két átlellenes sarokmezőjét levágtuk. Le lehet-e fedni a kapott táblát 31 darab 2×1 -es dominóval?
2. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben...
 - (a) pontosan egy darab 0 számjegy van?
 - (b) szerepel a 0 számjegy?
3. Adott a síkban végtelen sok olyan tengelypárhuzamos téglalap, amelyeknek bal alsó csúcsa az origó, és csúcsainak koordinátái egészek. Bizonyítsuk be, hogy mindig van közöttük kettő, melyek közül az egyik tartalmazza a másikat.
4. Egy 100×100 -as táblázat minden mezőjébe beírtuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét, majd összeadtuk minden sorban, oszlopban és mindkét átlóban is az ott található 100 számot. Bizonyítsuk be, hogy kaptunk két azonos összeget.
5. Ödön egy 10 lépcsőfokból álló lépcső első fokán áll. Hány különböző módon tud feljutni az első fokról a tizedik fokra, ha egy lépésben egy vagy két fokot lép előre, és hátrafelé nem lép?
6. Felosztható-e egy körlap $K = K_1 \cup K_2$ és egy négyzetlap $N = N_1 \cup N_2$ diszjunkt unióra úgy, hogy a kapott részek hasonlóak, vagyis $K_1 \sim N_1$ és $K_2 \sim N_2$?

Beadandó feladatok

1. Egy börtönben 100 rabot tartanak fogva, a cellák sorban 1-től 100-ig számozottak. Kezdetben minden cella zárva van; egy börtönőr végigmegy és minden cella zárján fordít egyet. A következő börtönőr minden második cella zárján fordít egyet (tehát a 2., 4. stb. cellák zárján), a következő minden harmadikon, és így tovább, végül az utolsó börtönőr csak a századik cella zárján fordít. Egy fordítás egy nyitott zárat bezár, illetve egy bezárt zárat kinyit. Szabadon engedik azokat a rabokat, akiknek a cellája végül nyitva marad. Mely cellák lakói szabadulnak? (3 pont)
2. Hányféleképpen lehet a bal alsó négyzetből a jobb felsőbe eljutni, ha egy lépésben vagy jobbra, vagy felfelé léphetünk? (3 pont)



3. Mutassuk meg, hogy a $\pi, 2\pi, \dots, 11\pi$ számok között van kettő, melyek végtelen sok tizedes jegyben megegyeznek egymással. (5 pont)