

Feladatmegoldó szeminárium 1.

2. óra

2013. 09. 18.

1. Lehet-e tetszőlegesen sok összetett szám egymás mellett?
2. Adott 4000 különböző pont a síkban. Igazoljuk, hogy van olyan kör, aminek a belsejében pontosan 2345 van az adott pontok közül.
3. Egy $2^n \times 2^n$ -es sakktábla egyik mezőjét eltávolítottuk. Bizonyítsuk be, hogy a maradék lefedhető 3 mezőből álló L alakú síkidomokkal.
4. Legyen x valós szám. Bizonyítsuk be, hogy a következő két tulajdonság ekvivalens:
 - (a) x felírható két egész szám hányadosaként,
 - (b) x tizedestört alakja vagy véges, vagy végtelen, de a jegyek egy idő után ismétlődnek.(Az előbbieket teljesülésekor mondjuk azt, hogy x racionális.)
5. Jelölje F_n az n -edik Fibonacci-számot, azaz $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Bizonyítsuk be, hogy
$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$
6. Egy csiga egy egyméteres gumiszalag egyik végéről a másik végére akar eljutni percenként egy centimétert megtéve. Sajnos a szalag másik végén egy gonosz manó ül, aki minden percben egy méterrel megnyújtja a gumiszalagot. Eljut-e a csiga valaha is a szalag végére?

Beadandó feladatok

4. Feldarabolható-e egy négyzet 13 darab (nem feltétlen különböző méretű) kisebb négyzetre? (3 pont)
5. 1000 katonát sorba állítunk egymás mellett keleti-nyugati irányban úgy, hogy mindenki észak feé néz. A parancsnok elkiáltja magát, hogy "Jobbra át!". Egy másodperccel később minden katonának kelet felé kellene nézni, de sajnos néhány katona nem sajátította el a jobb és bal közötti különbséget, úgyhogy lesznek egymás felé néző katonák. Minden olyan katona, aki szemben találja magát egy szomszédjával, úgy gondolja, hogy hibázott, ezért hátra arcot csinál (az is, aki esetleg jó irányban állna). Egy másodperccel később a "hátra arcok"-ok elvegése után a szemben álló katonák ismét 180° -os fordulatot tesznek, és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy az eljárás megáll véges időn belül! (3 pont)
6. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, amely szigorúan monoton nő és csak irracionális értékeket vesz fel? (5 pont)