

Feladatmegoldó szeminárium 1.

3. óra

2013. 09. 25.

1. Jelölje p_n az n -edik prímszámot. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor $p_n + p_{n+1}$ legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata.
2. Egy 10×10 -es tábla minden mezője feketére vagy fehérre van színezve. Egy lépésben egy tetszőleges sort vagy oszlopot kiválaszthatunk, és ott a mezők színét ellenkezőjére változtathatjuk. Elérhető-e minden színezés a csupa fehér indulásból véges sok lépésben?
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \leq a \leq n!$ egész, akkor a előáll legfeljebb n darab olyan szám összegeként, melyek mindegyike osztója $n!$ -nak.
4. Jack és Sam, a hírhedt vadnyugati banditák végre a seriff kezére kerültek. Bevallották, hogy egy bankrablás zsákmányát a következő módon rejtették el: találkoztak az odvas fánál, ahonnan Jack elindult a malom felé, Sam a híd felé. Jack a malomnál jobbra fordult, Sam a hídnál balra (mindketten 90 fokkal), és mindketten gyalogoltak még egyszer annyit, mint amennyit az odvas fától addig megtettek. Ezután elindultak egymás felé, félúton találkoztak, és elásták a zsákmányt. A seriff tudja, hol van a malom és a híd, de azt nem, hogy hol van az odvas fa. Hol kezdjen el ásni?
5. Adott egy négyzet és az egyik csúcsán egy kavics. Egy lépésben elvehetünk egy kavicsot, ám ekkor az egyik szomszédos csúcsra kell helyezniünk kettő kavicsot. Elérhető-e ilyen lépések ismétlésével, hogy a négyzet csúcsain 7, 14, 23, 40 kavics álljon (ebben a sorrendben)?
6. (a) Van-e olyan Fibonacci-szám, amely 8-cal osztva 4-et ad maradékul?
(b) Van-e olyan Fibonacci-szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 9999-re végződik?

Beadandó feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 5$ egész szám, akkor $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ összetett szám ($\lfloor \cdot \rfloor$ az alsóegészrészrt jelöli). (3 pont)
8. Egy kocka alakú sajttömbben 27 lyuk van $3 \times 3 \times 3$ -as elrendezésben. Mindegyikben lyukban van egy egér. Sípszóra minden egér átmászik egy szomszédos lyukba (szomszédos lyuk alatt „lapszomszédot” értünk). Bizonyítsuk be, hogy a sípszó után lesz üres lyuk. (3 pont)
9. Egy kör alakú autópálya mentén benzinkutak vannak, bennük különböző mennyiségű benzin. Tudjuk, hogy összesen pont annyi benzin van szétszétva a kutak közt, amennyi egy kör megtételére elég. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pontja a pályának, ahonnan egy autót üres tankkal elindítva végig tud menni a kutakban található benzin segítségével. (5 pont)