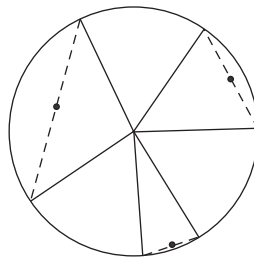


Feladatmegoldó szeminárium 1.

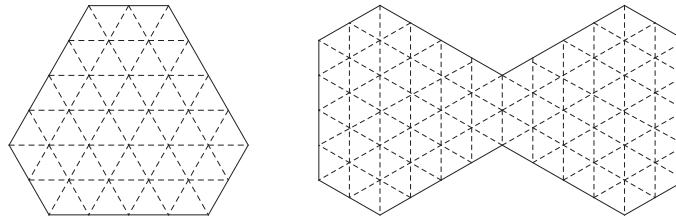
4. óra

2013. 10. 02.

1. András és Béla a következő játékot játsszák. Egy 8×8 -as sakktáblán egy királlyal felváltva lépkednek. Egy lépésben a király vagy jobbra, vagy felfelé, vagy jobbra és felfelé, azaz átlósan egyet léphet. Az nyer, aki a jobb felső mezőre (azaz h8-ra) lép. Kezdetben a király a bal alsó mezőn (a1-en) van, és András lép először. Kinek van nyerő stratégiája?
2. Guszti vett egy doboz Mackó sajtot, amiben eredetileg 6 egyforma körcikk alakú darab volt. Ebből hármát megevett, majd a félig üres dobozt betette a hűtőbe. Másnap reggel azt vette észre, hogy a szomszédos körcikk ív melletti sarkait összekötő szakaszok felezőpontjai (lásd az ábrát) szabályos háromszöget alkotnak. Mutassuk meg, hogy Guszti észrevétele helyes.



3. A szabályos háromszögrács ábrán látható hatszög alakú része lefedhető-e olyan rombusz alakú dominókkal, amelyek két szomszédos háromszög összeragasztásával kaphatók? És az az alakzat lefedhető-e rombuszokkal, amit úgy kapunk, hogy két ilyen hatszöget összeragasztunk a rövidebbik élük mentén?



4. Rendezzük sorba az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait úgy, hogy két szomszédos részhalmaz elemszáma eggyel térjen el, és a kisebbik mindig részhalmaza legyen a nagyobbiknak.
5. Képzeljünk el egy végtelen szállodát, amelynek végtelen sok szobája van; a portás szobája után jön az 1-es, aztán a 2-es, és így tovább, minden pozitív egész egy szoba száma. A portásnak van egy mikrofonja, amin be tud mondani valamit, ami minden szobában hallatszik.

Minden szoba tele van, amikor...

- (a) ...érkezik egy vendég, akit el szeretnének szállásolni. Mit mondjon a portás?
- (b) ...érkezik egy végtelen busz végtelen sok új vendéggel. Mit mondjon a portás, hogy ők is beférjenek?
- (c) ...érkezik egy busz ismeretlen számú, de véges sok vendéggel, akik azonban ragaszkodnak ahhoz, hogy szomszédos szobákat kapjanak?
- (d) Egy végtelen emeletes szálloda minden emeletén végtelen sok szoba van, mindegyikben egy-egy vendég. A szálloda igazgatósága kirándulást szervez a vendégeknek, amire mindenkit meghívna, ezért rendelnek egy végtelen személyes buszt. Hogyan lehet a szálloda összes lakójának a buszon ülőhelyet biztosítani?

6. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy n csúcsú konvex sokszög átlóinak a sokszög belsőjében?

Beadandó feladatok

10. Felírtuk egy táblára az $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ számokat, majd valamelyik kettőt letörölve visszairtuk a különbségüket. Ezt addig ismételtük, amíg csak egyetlen szám maradt. Lehet-e ez a 0? (3 pont)

11. Jelölje F_n az n -edik Fibonacci-számot, azaz $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

(3 pont)

12. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív racionális szám előáll véges sok *különböző* $\frac{1}{k}$ alakú tört összegeként (k pozitív egész). (5 pont)