

Feladatmegoldó szeminárium 1.

5. óra

2013. 10. 09.

1. Jenő és Béla felváltva írnak a tizedesvessző után számjegyeket végtelen sokáig. Jenő nyer, ha a kapott szám racionális, Béla, ha irracionális. Kinek van nyerő stratégiája?
2. Egy országban n város van. Tudjuk, hogy bármely 2 város között van közvetlen vonat, vagy buszjárat. A buszbérlettel tetszőlegesen sok busszal utazhatunk, a vonatbérlettel pedig tetszőlegesen sok vonattal. Aladárnak csak az egyik fajta bérletet van pénze megvenni. Igazoljuk, hogy biztosan tud olyan bérletet választani, amelyikkel bármelyik városból bármelyik városba el tud jutni!
3. Az $x^2 + 10x + 20$ polinomot véges sok lépésben átalakítottuk az $x^2 + 20x + 10$ polinommá úgy, hogy minden egyes lépésben valamelyik együtthatót 1-gyel változtattuk. Bizonyítsuk be, hogy menet közben volt olyan polinom, amelynek van egész gyöke.
4. Legyen $A_1, A_2, \dots, A_7$ egy R sugarú körbe írt szabályos hétszög hét csúcsa a kör kerülete mentén felsorolva. Bizonyítsuk be, hogy

$$|A_1 A_3|^2 + |A_1 A_7|^2 + |A_3 A_7|^2 = 7R^2.$$

5. Lehet-e 100 különböző páratlan szám reciprokösszege 1?
6. Egy 10×10 -es sakktábla alakú kertben egyes parcellákban gyomnövények is találhatók. Tudjuk, hogy ha egy parcella gyomos volt, akkor az is marad, és ha két oldalszomszédja gyomos, akkor a következő nap ő is az lesz. Azt tapasztaljuk, hogy néhány nap elteltével a gyom mind a 100 parcellát benőtte. Vajon hány gyomos parcella volt legalább kezdetben?

Beadandó feladatok

13. Egy paralelogramma oldalaira kifelé négyzeteket emelünk. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetek középpontjai maguk is négyzetet alkotnak. (3 pont)
14. Az alábbi táblázatból hányféleképp olvasható ki a MATEMATIKA szó, ha a tábla szélén bárhonnan indulhatunk, és minden lépésben jobbra, vagy lefelé léphetünk a szomszédos mezőkre?

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

(3 pont)

15. Bizonyítsuk be, hogy az $1, \dots, 2n$ számok közül akárhogy kiválasztva $n+1$ különböző egészet mindig lesz köztük kettő, melyek közül az egyik osztja a másikat. (5 pont)