

Feladatmegoldó szeminárium 1.

6. óra

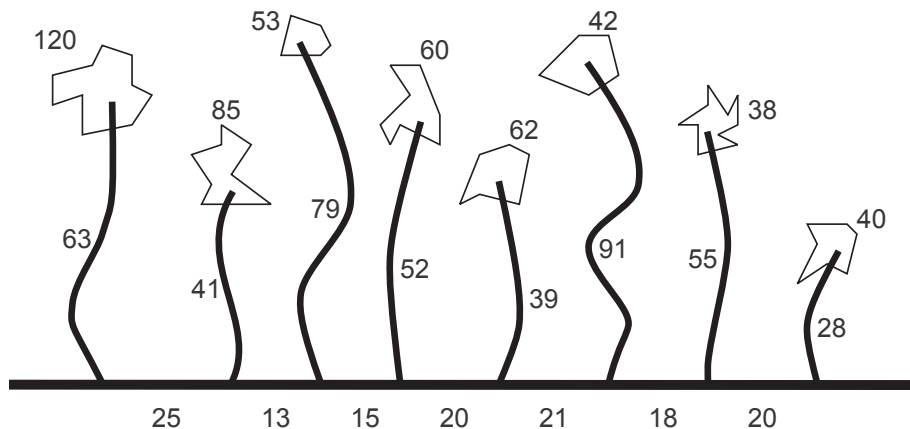
2013. 10. 17.

1. Az asztalon van két kupac kavics, az egyikben 12, a másikban 17 kavicsal. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: felváltva vesznek el kavicsokat, egy lépésben az egyik kupacból akármennyit el lehet venni (akár az összeset is, de legalább egyet el kell venni). Az nyer, aki az utolsó kavicsot veszi el (a két kupacból összesen). Béla kezd. Kinek van nyerő stratégiája és mi a stratégia?
2. Egy szigeten 100 kaméleon él, minegyik piros, kék vagy sárga színű. A szigetre érkező biológusok azt az érdekes szokást figyelték meg, hogy ha két kaméleon találkozik, üdvözlésként megváltoztatják a színüket. Ha azonos színűek voltak, akkor egy-egy (különböző) új színre, ha nem, akkor mindkettő a harmadik színre. (Egyéb hatásoktól a színük nem változik meg.) Egyik reggel az egyik biológus 20 piros, 30 sárga és 50 kék kaméleont számolt össze, másikkuk este száz pirosat. Lehetséges-e, hogy egyikük sem hibázott számolás közben?
3. Adjunk meg egy olyan $A \subset \mathbb{N}$ halmazt, amelyre igaz, hogy sem A , sem $\mathbb{N} \setminus A$ nem tartalmaz végtelen hosszú számtani sorozatot!
4. Igaz-e, hogy minden véges egyszerű gráf csúcshalmaza felosztható két részre úgy, hogy a gráf éleinek legalább fele a két rész között fusson.
5. El lehet-e helyezni az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ oldalhosszú négyzeteket átfedés nélkül egy 1 oldalhosszúságú négyzetbe.
6. Írjuk be a negyedsík rácsnégyzeteibe a pozitív egész számokat úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba minden egész szám pontosan egyszer forduljon elő! (Egy adott számot persze sokszor kell használnunk.)

Emlékeztető: 1. zh okt. 22-én 16 órától az R108 teremben.

Beadandó feladatok

16. Egy kerek asztalnál körben ül 30 gyerek, egyikük előtt az asztalon 30 csokoládé. Egy lépésben az egyik gyerek átadhat az előtte lévő csokikból kettőt a bal oldali szomszédjának, vagy kettőt a jobb oldalinak, vagy egyet-egyet a bal és jobb oldalinak. Elérhető-e ilyen lépések sorozatával, hogy minden gyerek előtt egy csoki legyen? (3 pont)
17. Nigéria egy eldugott kis falujában két nép él, a jorubák és az ibibiók. Minden joruba ismer 6 jorubát és 9 ibibiót. Minden ibibió ismer 10 jorubát és 6 ibibiót. (Az ismeretség kölcsönös.) Kik vannak többen a faluban, a jorubák vagy az ibibiók? (3 pont)
18. Adott 100 piros és 100 kék pont úgy, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy alkotható belőlük 100 piros-kék pontpár úgy, hogy a párokat összekötő szakaszok nem metszik egymást. (5 pont)
19. n idős hölgy mindegyike tud egy pletykát. Ha két hölgy beszél egymással telefonon, akkor az összes rendelkezésükre álló pletykát megosztják egymással. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 4$, akkor $2n - 4$ telefonbeszélgetéssel megoldható, hogy mindenki minden pletykát megismerjen. (3 pont)
20. Néhány falu a főút mellett szeretné elérni, hogy megálljon náluk a busz. A busztársaság azonban ezen a szakaszon csak egy buszmegállót hajlandó létesíteni. Hová építsék a megállót, hogy összesen a lehető legkevesebbet kelljen gyalogolni az utasoknak? Az ábrán az egyes falvaknál fel van tüntetve azon emberek száma, akik buszozni fognak, valamint az egyes útszakaszok hossza.



(3 pont)

21. Tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ intervallum legalább kétszeresen le van fedve véges sok intervallummal, azaz a $[0, 1]$ minden pontja legalább két fedőintervallumban benne van. Mutassuk meg, hogy ekkor a fedőintervallumok szétoszthatók két halmazba úgy, hogy mindkét halmaz intervallumai legalább egyszeresen lefedjék a $[0, 1]$ -et. (5 pont)