

Feladatmegoldó szeminárium 1.

7. óra

2013. 10. 30.

1. Nándorfehérvár ostrománál Hunyadi és a török szultán a csata közepén úgy határoznak, hogy vérontás helyett inkább a következő játékkal döntenek el a vár sorsát. A várba vezető lépcső fokain áll néhány török katona (többben is állhatnak egy lépcsőfokon). A szultán két csapatra osztja őket, majd Hunyadi elküldi az egyik csapatot, ezután a másik csapat minden tagja lép egy fokot előre. Ezt ismétlik. A török szultán nyer, ha bejut legalább egy katona a várba; Hunyadi nyer, ha elfogynak a katonák. A katonák milyen állásánál van Hunyadinak nyerő stratégiája?
2. Egy számot *teljes hatványnak* nevezünk, ha a^n alakú, ahol $a, n \geq 2$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy nincs négy egymást követő teljes hatvány.
3. (a) Legyen $d \geq 2$ egész. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2^n}}$$

sorösszeg irracionális.

- (b)* Legyen a_n egész számsorozat, melyre $a_n \geq a_{n-1}^2$ és $a_1 \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

sorösszeg irracionális.

4. A török szultán 100 rabnak a következő ajánlatot teszi: felállítja őket egy sorba, és mindenkinek a fejére helyeznek egy piros vagy kék sapkát. Mindenki látja a sorban előtte állók sapkáját, de a mögötte állókét és a sajátját nem. Ezután egyesével mindenki tippelhet a saját sapkája színére: először a sor végén álló rab tippel (aki mindenki más sapkáját látja), majd az előtte álló, és így tovább. A rabok hallják egymás tippjeit. Aki eltalálja a saját sapkája színét, azt a szultán szabadon engedi. A rabok a sapkák felhelyezése előtt megbeszélhetnek egy közös stratégiát. Legfeljebb hány rab tud biztosan kiszabadulni?
5. (a) Bizonyítsuk be, hogy akárhogy színezzük ki a sík összes pontját két szín valamelyikével, van két olyan pont, melyek 1 távolságra vannak egymástól és egyszínűek.
(b) Bizonyítsuk be, hogy akárhogy színezzük ki a sík összes pontját három szín valamelyikével, van két olyan pont, melyek 1 távolságra vannak egymástól és egyszínűek.
6. Adott a síkon egy szakasz és egy vele párhuzamos egyenes. Meg lehet-e szerkeszteni egyetlen vonalzó segítségével a szakasz felezőpontját?

Beadandó feladatok

22. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet színezni a sík összes pontját 9 színnel úgy, hogy ne legyen két azonos színű pont 1 távolságra egymástól. (3 pont)
23. Egy 50 fős társaságban mindenkinek legfeljebb 3 haragosa van a többiek között (a haragosság kölcsönös). A társaság kirándulni megy két busszal. Szétoszthatók-e az emberek két részre úgy, hogy mindenki csak legfeljebb egy haragosával kerüljön egy buszra? (A buszok 50 fősek.) (3 pont)
24. Van-e olyan folytonos valós függvény, melynek racionális helyen irracionális, irracionális helyen racionális az értéke? (5 pont)