

Feladatmegoldó szeminárium 1.

8. óra

2013. 11. 05.

1. A számegegyenesen egy bolha ugrál a $+\infty$ felé, a 0-ból kiindulva, végtelen sok lépést megtéve. „Konvergál-e” a bolha, ha
 - (a) Minden ugrása kisebb, mint az előző?
 - (b) Ugrásainak sorozata 0-hoz tart?
 - (c) Minden ugrása legfeljebb feleakkora, mint az előző?
 - (d) Minden ugrása legfeljebb feleakkora, mint az előző, de nem feltétlenül csak előre ugrik a bolha?
 - (e) Ugrásainak sorozata 0-hoz tart, és felváltva ugrik előre illetve hátra?
2. Igaz-e, hogy egy monoton függvény legfeljebb megszámlálható sok helyen szakadhat?
3. A szultán 5 rabnak a következő ajánlatot teszi: leülteti őket körben, majd mindenkinek a fejére rak egy sapkát, ami piros vagy kék. Mindenki látja a többiek sapkáját, de a sajátját nem. Ezután mindenkinek egyszerre tippelnie kell a saját sapkája színére; ha legalább egy ember eltalálja a sapkája színét, akkor a szultán elengedi mindannyiukat. Mielőtt leülteti a rabokat, megbeszélhetik a taktikát a tippelésre. Ki tudnak-e biztosan szabadulni?
4. Az asztalon 9 golyó van és egy kétkarú mérleg. Az egyik golyó nehezebb a többinél. Legkevesebb hány méréssel lehet biztosan megtalálni ezt a golyót?
5. Egy 12×15 -ös téglalap belsejében elhelyeztünk 15 db 1×1 -es négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy elhelyezhető egy egységkör a téglalap belsejében úgy, hogy nincs közös pontja egyik négyzettel sem.
6. Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív egyváltozós polinom előáll kisebb fokú polinomok négyzetösszegeként!

Beadandó feladatok

25. Egy kalóznak 100 ládaja volt telis-tele arannyal. Hírét vette viszont, hogy elsőtisztje becsapta, és az egyik ládában csupa hamis pénz van. A kalóz szeretne a dolog végre járni, ezért egy egykarú mérleget szed elő. Mivel sok a dolga, minél kevesebb méréssel szeretné kideríteni, melyikben van a hamis pénz. Mit tennénk a helyében? (3 pont)
26. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hatványok reciprokösszege véges. (3 pont)
27. Egy négyzet alakú medence közepén úszkál Jerry, amikor feltűnik Tom. Ám, mint köztudott, Tom irtózik a víztől. Jerry szeretne elmenekülni, de sajnos amíg a vízben van, addig Tom 4-szer olyan gyors, mint Jerry. A szárazföldön azonban már Jerry a gyorsabb. El tud-e menekülni? (5 pont)