

Feladatmegoldó szeminárium 1.

9. óra

2013. 11. 13.

1. Adott a síkon 1000 pont és egy egységsugarú körvonal. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pontja a körvonalnak, amelytől az 1000 pont távolságának összege legalább 1000.
2. Adott néhány vektor a síkban, amelyek összhossza 1.
 - (a) Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük néhány, amelyek összegének hossza legalább $1/6$.
 - (b)* Mutassuk meg, hogy a fenti $1/6$ helyett a legnagyobb garantálható hossz $1/\pi$.

3. Mennyi a

$$\sum_{k=0}^{2013} \binom{2013}{3k}$$

binomiális együtthatók összege?

4. Adott 12 darab külsőre egyforma golyó. Az egyik golyó tömege eltér a többitől, de azt nem tudjuk, hogy nehezebb vagy könnyebb-e a többinél. Kétkarú mérleggel három méréssel eldönthető-e, melyik golyó a különböző és hogy nehezebb vagy könnyebb-e?
5.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy a számegyenes minden racionális száma fölé emelhető egy-egy T betű úgy, hogy azok nem metszik egymást.
 - (b) Mutassuk meg, hogy az összes valós szám fölé viszont nem rajzolhatók egymást nem metsző T betűk.
6. Egy ejtőernyős egy 10 km sugarú sűrű erdőben ér földet. Célja, hogy minél előbb biztosan elérje az erdő szélét úgy, hogy az erdőn belüli pozícióját nem ismeri. Milyen útvonalon haladjon?

Beadandó feladatok

28. Adott egy egészelemű négyzetes mátrix, melyben minden sor összege osztható n -nel. Mutassuk meg, hogy ekkor a mátrix determinánsa is osztható n -nel. (3 pont)
29. Adott egy 4×4 -es sakktábla. Bejárható-e a tábla minden mezője egy húszárral úgy, hogy minden-hová pontosan egyszer lépünk? A húzár L alakban lép, egy lépésben egyik irányban két mezőt és rá merőlegesen egy mezőt. (3 pont)
30. Egy számot *teljes hatványnak* nevezünk, ha a^n alakú, ahol $a, n \geq 2$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy létezik teljes hatványokból álló bármilyen véges hosszú számtani sorozat. (5 pont)