

Feladatmegoldó szeminárium 1.

10. óra

2013. 11. 20.

1. A síkon az origóból kiindulva egy rozsomák szalad állandó (de ismeretlen) sebességgel. Tudjuk, hogy a sebességvektor koordinátái egész számok. Mi minden perc elteltével ledobhatunk egy csapdát a sík egy tetszőleges rácspontjára, ami az éppen ott található állatokat befogja. El tudjuk-e kapni a rozsomákot véges idő elteltével, ha tudjuk, hogy mikor indult, és először az első perc végén dobhatunk le csapdát? Mi a helyzet, ha nem tudjuk, hogy honnan indul, csak azt, hogy az egy rácspont?
2. Egy edényt kell elmosnunk, ehhez 50 ml víz áll rendelkezésünkre. Kezdetben 1 ml szennyeződés található benne. A tisztítás úgy történik, hogy valamennyi vizet beleöntünk, az egyenletesen elkeveredik a benne lévő folyadékkal, majd kiöntjük, és a keverékből 1 ml benne marad. A cél az, hogy a kezdeti szennyeződés minél kisebb része maradjon az edényben. Használjuk ki minél jobban az 50 ml vizet.
3. A Cantor-halmazt a következő módon definiáljuk: a  $[0, 1]$  intervallumból indulunk ki; először hagyjuk el az  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  nyílt intervallumot. Ezután hagyjuk el a megmaradó 2 intervallum mindegyikéből a középső nyílt egyharmadukat, és ezt folytassuk végtelen sok lépésen keresztül. A megmaradó pontthalmaz a Cantor-halmaz.
  - (a) Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz „összhossza” 0, azaz lefedhető véges sok tetszőlegesen kis összhosszúságú intervallummal.
  - (b) Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz számossága kontinuum.
4. Adott a síkon egy szakasz és egy vele párhuzamos egyenes. Osszuk fel a szakaszt  $n$  egyenlő részre egy vonalzó segítségével.
5. Szervezzünk körmérkőzéses bajnokságot 20 csapat számára, azaz osszuk be a lehetséges meccseket 10 fordulóra úgy, hogy minden fordulóban minden csapat egy meccset játsszon, és az összes forduló alatt bármely két csapat pontosan egy meccset játsszon egymással.

Beadandó feladatok

31.

$$\sum_{k=0}^{503} \binom{2013}{4k} = ?$$

(3 pont)

32. Legyenek  $d_1, d_2, \dots, d_n$  olyan pozitív egészek, melyek összege  $2n - 2$ . Bizonyítsuk be, hogy van olyan fagráf, melynek ezek a fokszámok. (3 pont)
33. Mutassuk meg, hogy minden  $x \in [0, 2]$  szám felírható  $y + z$  alakban, ahol  $y$  és  $z$  a Cantor-halmaz elemei. (5 pont)