

Feladatmegoldó szeminárium 1.

11. óra

2013. 11. 27.

1. Felveszünk egy körvonalon n pontot, majd mindet összekötjük az összes többivel. Legfeljebb hány tartományra oszthatják a keletkező húrok a körlapot?
2. A számegyenesen az origóból kiindulva egy rozsomák szalad állandó (de ismeretlen) sebességgel. Tudjuk, hogy a sebessége egy fix valós szám és pozitív irányba indul. Mi minden perc elteltével ledobhatunk egy egységnyi hosszú csapdát, ami az éppen ott található állatokat befogja. El tudjuk-e kapni a rozsomákot véges idő elteltével, ha tudjuk, hogy mikor indult, és először az első perc végén dobhatunk le csapdát?
3. (a) Adott két korlátos valós számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy van olyan indexsorozat, amely mentén mindkettő konvergens.
(b) Adott megszámlálható sok korlátos valós számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy van olyan indexsorozat, amely mentén az összes egyszerre konvergens.
4. Adott egy alakzat a síkon, melynek területe $10,1 \text{ cm}^2$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan eltoltja, mely 11 rácspontot tartalmaz, ahol a négyzetrács beosztása 1 cm .
5. Egy $n \times n \times n$ -es kocka n^3 darab egységnyi üvegekockából épül fel. Néhány üvegekockát fakockára akarunk kicserélni úgy, hogy az építményünk egyik tengelypárhuzamos irányból se engedje át a fényt. Legalább hány fakockára van szükség?
6. Adottak $0 < a, b, c < 1$ irracionális számok, melyekre $a + b + c = 1$. Ha mindegyik szám $1/2$ -nél kisebb, akkor megállunk. Különben megduplázzuk mindegyiket, majd amelyik 1 -nél nagyobb lett, abból levonunk 1 -et. Igaz-e, hogy ez a folyamat egy idő után véget ér?

Beadandó feladatok

34. Egy $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ nagyságú négyzet alapú karámban egy 12 méter hosszú kígyó tekereg. Elég mérges a kígyó, ezért egy pálcával szeretnénk minél több helyen lefogni. Mutassuk meg, hogy létezik olyan egyenes, amely felülnézetből a kígyót legalább 6 pontban metszi! (3 pont)
35. Mi a maximuma a $3 \sin x + 4 \cos x$ kifejezésnek? (3 pont)
36. A számegyenesen egy rozsomák szalad állandó (de ismeretlen) sebességgel. Tudjuk, hogy a sebessége egy fix valós szám, de a kezdőpontja ismeretlen. Mi minden perc elteltével ledobhatunk egy egységnyi hosszú csapdát, ami az éppen ott található állatokat befogja. El tudjuk-e kapni a rozsomákot véges idő elteltével, ha tudjuk, hogy mikor indult, és először az első perc végén dobhatunk le csapdát? (5 pont)