Feladatok a Matematika M1 tantárgyhoz építészmérnök hallgatóknak

összeállította: Vető Bálint

2005

Témakörök:

1. Bevezető feladatok: elemi függvények tulajdonságai, inverz függvény
2. Sorozatok és függvények határértéke
3. Deriválás
4. Függvényvizsgálat
5. Differenciálszámítás alkalmazásai, szöveges szélsőérték feladatok
6. Határozatlan integrál, parciális integrálás
7. Parciális törtekre bontás, helyettesítéses integrálás, határozott integrál
8. Integrálszámítás alkalmazásai: terület, ívhossz, térfogat, felszín
9. Mátrixok, determinánsok
10. Lineáris egyenletrendszerek

Matematika M1 gyakorlat

1. feladatsor

2005. szept. 14.

1. Ábrázold az alábbi függvényeket derékszögű koordinátarendszerben:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{ha} \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{ha} \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$,

   (b) $g(x) = \log_2 |x+2|$,

   (c) $h(x) = \arcsin(x-3)$.

2. Határozzuk meg az $f(x) = \arccos(2-2x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét, számoljuk ki az inverzét, majd rajzoljuk fel a grafikonját.

3. Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az $f(x)$ grafikonjából az $f(x+a)$, $|f(x)|$ és $f(|x|)$ ($a \in \mathbb{R}$) függvények grafikonjai? (Feltesszük, hogy $f(x)$ az egész számegyenesen értelmezett.)

4. Egy 5×5–ös sakktábla minden mezőjén áll egy katicabogár. Egy adott pillanatban minden katica felkerekedik és átballag a tábla egy (él mentén) szomszédos mezőjére. Előfordulhat-e, hogy most is a tábla minden mezőjén egy katica áll?

5. Két egyforma strucctojásunk van és egy 36 emeletes felhőkarcoló előtt állunk. Szeretnénk megtudni, hogy mi az a legkisebb emeletszám, ahányadikról egy strucctojás leejtve már összetörik (lehet, hogy már az elsőről kiejtve is végük, de az is lehet, hogy még 36 emeletes zuhanást is kibírnak). Legalább hány ejtési kísérletre lehet legrosszabb esetben szükségünk? (A válasz megadása után nem kell, hogy ép strucctojásunk legyen.)

Matematika M1 gyakorlat

2. feladatsor

2005. szept. 21.

1. Korlátos, monoton, ill. konvergens-e az
$$a_n = \frac{6n+2}{n+2} \quad \text{és a} \quad b_n = 2\cos n\frac{\pi}{2}$$
sorozat?

2. Döntsük el, hogy a következő sorozatok konvergensek-e. Ha igen, mihez konvergálnak?
$$a_n = \left(\frac{n+8}{n+5}\right)^{5n+2}, \quad b_n = \frac{4^{n-1}}{3^n + 2^{n+1}}, \quad c_n = n - \sqrt{n(n-3)}, \quad d_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

3. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét, ha létezik:
$$a_n = \frac{1000n^3 + 20n^2}{0{,}001n^4 + 100n^2}, \quad b_n = \frac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}, \quad c_n = \sqrt[4]{\frac{2^n+1}{n+2^n}},$$
$$d_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad e_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1} - n)}, \quad f_n = \frac{\sqrt{n^3+3n^2} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2} + \sqrt[5]{n^7+3n^3}},$$
$$g_n = \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21} \;\; (n \geq 2), \quad h_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad i_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

4. Számítsuk ki az alábbi függvények megadott határértékeit! (Ha szükséges, akkor az $x \to x_0$ határátmenet elvégzése előtt egyszerűsítsünk az $x - x_0$ tényezővel.)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1},$$
$$\lim_{x\to 0+} (1+2x)^{\frac{1}{3x}+1}, \quad \lim_{x\to 0+} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x \cdot \tan 2x}{x^2\cos 3x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(35x+5) - \ln 5}{10x}.$$

Matematika M1 gyakorlat

3. feladatsor

2005. szept. 28.

1. Deriváljuk a következő függvényeket:

$$x^2 - 2x + 3, \quad x^2 \sin x, \quad xe^x, \quad (5x^3 - 3x + 2)\ln x, \quad \frac{1}{x} + \sqrt{x^5}, \quad \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}.$$

2. Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak a következő függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

$$\sin x^3, \quad \sin^2(\tan x), \quad \sin(\tan^2 x).$$

3. Mennyi az alábbi függvények deriváltja?

$$\left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6\right)^6, \quad \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^5, \quad (\sin^{20} x + 1)^{20}.$$

$$\frac{1}{\cos 5x}, \quad 2^x \sin x \log_2 x, \quad \frac{4}{(1-x^2)(1-3x^3)}, \quad \frac{(x^3 + 7x^2 + 6x)\ln x}{\cos 3x + 10}.$$

4. A logaritmikus deriválás módszerével számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait!

$$(\sin x)^x, \quad (1+x)^{1-x}, \quad (\ln x)^{\ln x}.$$

5. Írjuk fel az alábbi görbék érintőjének egyenletét az adott x_0 értékhez tartozó pontban!

   (a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = 2,$

   (b) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}.$

6. Számítsuk ki a következő magasabb rendű deriváltakat:

$$(\sin(3x+1))^{(4)}, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(5)}, \quad (x^n)^{(n)}.$$

Matematika M1 gyakorlat

4. feladatsor

2005. okt. 5.

1. Határozzuk meg az $y = \arctan\dfrac{1}{x-2}$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos az $y = -\dfrac{1}{2}x$ egyenletű egyenessel! Írjuk fel e pontokban az érintő egyenletét!

2. Az m paraméter mely értéke esetén lesz az alábbi függvény mindenütt folytonos ill. differenciálható?
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + 1 & \text{ha} \quad x < 1 \\ m(x-1) + 7 & \text{ha} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit:
   (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$,
   (b) $g(x) = 3x + \cos x$,
   (c) $h(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

4. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket:
   (a) $f(x) = 2x^2 - x^3$,
   (b) $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$,
   (c) $h(x) = x^2 \ln x$,
   (d) $i(x) = \frac{(x-7)(x+2)}{x-10}$.

5. Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét (az egyes görbékhez a metszéspontban húzott érintők hajlásszögét):
   (a) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$,
   (b) $y = \ln x, \quad x$ tengely.

Matematika M1 gyakorlat

5. feladatsor

2005. okt. 12.

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket a L'Hôpital-szabály segítségével:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x}, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}.$$

2. Egy folyó partján egy $3200\,m^2$ területű, téglalap alakú telket akarunk elkeríteni a lehető legrövidebb kerítéssel. A folyó partján nem állítunk kerítést. Hogyan válasszuk a téglalap oldalait?

3. Egy tó partjától $300\,m$-re tartózkodunk egy csónakban. A parton, a csónakból a partra bocsátott merőleges talppontjától $1000\,m$-re van az állomás. Elérhetjük-e a 21 perc múlva induló vonatot, ha a vízben a csónakkal percenként $48\,m$-t, a parton pedig percenként $60\,m$-t tudunk megtenni?

4. Adott R sugarú körlemezből mekkora nyílásszögű körcikket kell kivágnunk, hogy maximális térfogatú tölcsért kapjunk?

5. Adjuk meg az adott R sugarú gömbbe beírható maximális térfogatú henger adatait.

6. Egy $4\,m$ szélességű torony alján $2\,m$ magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba egy $8\,m$ hosszú létra?

Matematika M1 gyakorlat

6. feladatsor

2005. okt. 26.

1. Számítsuk ki a következő, alapintegrálokra visszavezethető határozatlan integrálokat:

$$\int 7x^4 \,\mathrm{d}x, \quad \int \left(\sqrt[5]{x} + \sqrt{x\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x, \quad \int \frac{x+1}{x-1} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}}, \quad \int (4\cos x + 5\sin x)\,\mathrm{d}x, \quad \int \left(\sin 3x + e^{4x+1}\right) \mathrm{d}x.$$

2. Határozzuk meg az alábbi, $\int f(x)^\alpha f'(x)\,\mathrm{d}x$ alakú integrálokat:

$$\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x+10)^7}} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}, \quad \int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x}{1-2x^2} \,\mathrm{d}x, \quad \int \sin^8 x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x}{e^x + 100} \,\mathrm{d}x.$$

3. A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat:

$$\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x, \quad \int x^2 \sin 2x \,\mathrm{d}x, \quad \int e^{2x} \cos 3x \,\mathrm{d}x, \quad \int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x, \quad \int \ln x \,\mathrm{d}x.$$

4. Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int \cos 5x \cos 7x \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin \ln x}{x} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x.$$

Matematika M1 gyakorlat

7. feladatsor

2005. nov. 2.

1. Ha szükséges, parciális törtekre bontás után integráljuk az alábbi racionális tört-függvényeket:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-8}, \quad \int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-7x+10},$$

$$\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{5}{x(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Integráljuk a következő törteket megfelelő helyettesítéssel:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x+2}{1+\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Számítsuk ki a határozott integrálok értékét:

$$\int_0^5 (5x^3+1)\,\mathrm{d}x + \int_5^4 (5x^3+1)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 2x, \quad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{ahol} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{ha} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Matematika M1 gyakorlat

8. feladatsor

2005. nov. 9.

1. Mennyi az alábbi határozott integrálok értéke?

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}, \quad \int_0^7 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}}, \quad \int_{-1}^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét,
   (a) amelyet az $x^2+y^2 \leq 4$ körlapból az $x^2+(y-2)^2=4$ körön kívül eső pontok elhagyásával kapunk;
   (b) amelyet az $y=\sin x,\ y=x,\ x=\frac{\pi}{2}$ egyenletű görbék határolnak.

3. Készítsünk vázlatot, majd határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síktartomány geometriai területét és tömegközéppontjának koordinátáit:
   (a) $y=4-x^2$ és $y=0$;
   (b) $y=x^3,\ y=0,\ x=1$;
   (c) $y=\frac{1}{x^2},\ y=0,\ x=1,\ x=3$.

4. Mennyi az $f(x)=\operatorname{ch} x$ függvény (láncgörbe) ívhossza az $x=-1$ és $x=1$ pontok között?

5. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék adott intervallumhoz tartozó részének x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát és felszínét:
   (a) $y=\sqrt{1+x^2},\ x\in[0,3]$;
   (b) $y=\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a]\quad (a>0$ paraméter$)$.

Matematika M1 gyakorlat

9. feladatsor

2005. nov. 23.

1. Számítsuk ki az $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$ és $\underline{b} = 9\underline{i} + 10\underline{j} + 10\underline{k}$ vektorok skaláris szorzatát, majd ennek segítségével bontsuk fel a $\underline{b}$ vektort $\underline{a}$-val párhuzamos és rá merőleges komponensekre!

2. Legyenek adottak az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el a következő mátrixműveletek közül azokat, amelyeket lehet:

$$A + A,\ A + B,\ AB,\ AC,\ AC + 2C,\ D^2,\ BC,\ CB.$$

3. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét!

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Legyen $\underline{a} = (2, -2, 1)$, $\underline{b} = (4, -2, 3)$ és $\underline{c} = (-2, 3, 6)$.
   (a) Számítsuk ki az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzatot!
   (b) Mennyi az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott háromszög területe?
   (c) Egy síkban helyezkedik-e el a három vektor?
   (d) Ha nem, adjuk meg a kifeszített tetraéder térfogatát!

Matematika M1 gyakorlat

10. feladatsor

2005. nov. 30.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszereket!

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 10 \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ x & - & y & - & 2z & = & -7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ x & - & y & - & 2z & = & -7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \end{array}$$

3. Adjuk meg a t paraméter értékétől függően az alábbi egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ -3 & -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ 3 & 11 & 20 & -5 \\ -2 & 0 & -6 & -4 \\ 4 & 2 & 14 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ -8 \\ q \end{bmatrix}$$

(a) A p és q paraméterek mely értéke mellett nincs megoldása az egyenletrendszernek?

(b) Lehet-e a paramétereket úgy választani, hogy pontosan egy megoldás legyen?

(c) Lehet-e a paramétereket úgy választani, hogy végtelen sok megoldás legyen?

(d) Mi az egyenletrendszer megoldása, ha $p = q = 20$?