

Hosszú memóriájú bolyongások aszimptotikus viselkedése

tézisfüzet

Vető Bálint

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet

Témavezető:
prof. Tóth Bálint

2011

Bevezetés

A bolyongások vizsgálata a modern valószínűségszámítás egyik központi témaköre. Az egyszerű bolyongás \mathbb{Z}^d -n független azonos eloszlású lépések sorozatával definiálható. Ezen alapmodell viselkedése jól ismert, és a lépések függetlenségének elhagyásával természetes módon általánosítható. A fő nehézség a Markov-tulajdonság elvesztése, ezért ilyenkor a hagyományos módszerek nem alkalmazhatóak. Így a hosszú memóriájú bolyongások vizsgálata teljesen más megközelítést és új ötleteket igényel.

Jelen dolgozatban öntaszító bolyongásokat tárgyalunk. Ez azt jelenti, hogy a bolyongót olyan helyek irányába tereljük, ahol a múltban kevés időt töltött. A definíció a lokális idők bevezetésével precízzé tehető. Ezek a rács egyes csúcsin (élein) eltöltött időt mérik. A dolgozat fő modelljében a bolyongó átmeneteit a lokális idő diszkrét gradiense határozza meg, és ezek a bolyongót a saját lokális idejének diszkrét *negatív* gradiense irányába lökik. Ezt a modellt eredetileg *'true' self-avoiding walk*nak nevezték, mert ez egy valódi bolyongás abban az értelemben, hogy egy $n + 1$ hosszúságú trajektória képezhető egy n hosszú trajektóriából egy adott eloszlású lépés megtételével. Ez nem igaz az ún. self-avoiding walk esetében. A *'true' self-avoiding walk* néven bevezetett modellt a dolgozatban *rövidlátó öntaszító bolyongás*nak (myopic self-avoiding walk) nevezzük.

A rövidlátó öntaszító bolyongás folytonos térbeli megfelelőjét is vizsgáljuk. A mozgást lényegében ugyanaz a mechanizmus hajtja, amely a lokális időktől függ, de a fellépő irregularitást konvolúcióval simítjuk. Az így nyert diffúziós folyamat az *öntaszító Brown-féle polimermodell*.

A jelen dolgozat alapjául szolgáló kutatás általános motivációja a statisztikus fizikából származik. Vizsgálataink fő tárgyát, a rövidlátó öntaszító bolyongást először Amit, Parisi és Peliti vezette be 1983-ban a fizikus irodalomban, ld. [APP83]. Ez volt az első példa olyan nemtriviális hosszú memóriájú bolyongásra, amely a bolyongások megszokott diffúzív viselkedésétől minőségileg eltérő tulajdonságokat mutat. Az ezen szerzők által adott eredeti definíció a következő alfejezetben olvasható.

A rövidlátó öntaszító bolyongás az önkölcsönható bolyongások tágabb családjába tartozik, amely újabb felkeltette a kutatók érdeklődését. Más tipikus példák az öntaszító Brown-féle polimer mellett az önelkerülő bolyongás (self-avoiding walk) és az önvonzó bolyongás (reinforced random walk). Ezen bolyongások és diffúziók hosszú memóriája a lokálisidő-folyamat szintjén természetes módon definiált önkölcsönható mechanizmus révén alakul ki. Az önkölcsönható bolyongások és folyamatok aszimptotikus skálatulajdonságainak felderítése matematikai kihívást jelent a '80-as évek elje óta. A két fő modellcsalád, a rövidlátó öntaszító bolyongás és az öntaszító Brown-féle polimer, melyek a fizikus ill. a valószínűségszámítási irodalomban jelentek meg, ugyan két különböző helyről származnak más-más motivációval, mégis nagyon hasonló jelenségeket mutatnak.

A rövidlátó öntaszító bolyongás

Legyen $X(n)$ a \mathbb{Z}^d egész rácson $X(0) = 0$ -ból induló elsőszomszéd-bolyongás. A lokális idejét minden $x \in \mathbb{Z}^d$ csúcsra jelölje

$$\ell(n, x) := \#\{0 < k \leq n : X(k) = x\}, \quad (1)$$

ahol $\#\{\dots\}$ a halmaz elemszáma. Ekkor $X(n)$ átmenetvalószínűségei:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(n+1) = x+e \mid \mathcal{F}_n, X(n) = x) &= \frac{\exp\{-\beta\ell(n, x+e)\}}{\sum_{|e'|=1} \exp\{-\beta\ell(n, x+e')\}} \\ &= \frac{\exp\{-\beta(\ell(n, x+e) - \ell(n, x))\}}{\sum_{|e'|=1} \exp\{-\beta(\ell(n, x+e') - \ell(n, x))\}}, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol $|e| = 1$, $\beta > 0$ rögzített konstansok, és \mathcal{F}_n a teljes múltbeli információt jelenti beleértve a lokális időket az n -edik lépésig. Ekkor az $X(n)$ bolyongást rövidlátó öntaszító bolyongásnak nevezzük.

Renormalizációs csoportos érvelések alapján de precíz bizonyítások nélkül már az [APP83] cikk szerzői is sejtették, hogy a rövidlátó öntaszító bolyongás modelljének felső kritikus dimenziója kettő. Ez azt jelenti, hogy ennél magasabb dimenziókban a rövidlátó öntaszító bolyongás az egyszerű bolyongáshoz hasonlóan diffúzív viselkedést mutat, és logaritmikus korrekció jelenik meg két dimenzióban. Az egydimenziós viselkedést szuperdiffúzívnek várták. Peliti és Pietronero a [PP87] cikkben skálázási érvelést használva érveltek amellett, hogy egy dimenzióban az elmozdulás tipikus nagyságrendje az idő $2/3$ -ik hatványa, de a határeloszlást nem adták meg. A rövidlátó öntaszító bolyongás renormalizációjáról még az [OP83] cikk olvasható.

A rövidlátó öntaszító bolyongásról sokszor kényelmesebb folytonos időben beszélni. A dolgozat egyik modelljét is folytonos időben adjuk meg. A definíció könnyen általánosítható, ez a 3. fejezetben is megtalálható.

A rövidlátó öntaszító bolyongás (2) utolsó kifejezésével megadott átmenetvalószínűségei arányosak a lokális idő diszkrét negatív gradiensének exponenciális függvényével. Ezt a definíciót valamelyest általánosítjuk azzal, hogy az exponenciális függvény helyett egy tetszőleges nemcsökkenő $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt használunk, amelyre később enyhe technikai feltételeket szabunk. Formálisan (2) helyett a

$$\mathbf{P}(X(n+1) = x+e \mid \mathcal{F}_n, X(n) = x) = \frac{w(\ell(n, x) - \ell(n, x+e))}{\sum_{|e'|=1} w(\ell(n, x) - \ell(n, x+e'))} \quad (3)$$

definíciót adjuk, amely a $w(u) = e^{\beta u}$ választással megegyezik (2)-vel. A módszereink erre az általánosított modellre is érvényesek maradnak, ahogy ez a 2. és a 3. fejezetben szerepel.

Az öntaszító Brown-féle polimermodell

A d dimenziós öntaszító Brown-féle polimert $X(t)$ -vel jelöljük, ez egy \mathbb{R}^d -értékű sztochasztikus folyamat. (Ugyanazt a jelölést használjuk tehát itt is, mint a rövidlátó öntaszító bolyongás esetén, de ez nem okoz félreértést, mert a szövegkörnyezetből eldönthető, melyikről van szó.) A lokális idő mértékét itt az

$$\ell(t, A) := |\{0 < s \leq t : X(s) \in A\}| \quad (4)$$

képlet definiálja, ahol $A \subseteq \mathbb{R}^d$ tetszőleges mérhető részhalmaz, és $|\{\dots\}|$ az adott halmaz Lebesgue-mértéke. Legyen $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ sima gömbszimmetrikus közelítő egység, pl. a $V(x) := \exp(-|x|^2)$ egy megfelelő választás. Ekkor az öntaszító Brown-féle polimer a

$$dX(t) = dB(t) - \text{grad}(V * \ell(t, \cdot))(X(t)) dt \quad (5)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása, ahol $*$ az \mathbb{R}^d -beli konvolúciót jelöli, $B(t)$ pedig standard Brown-mozgás. Az (5)-ben szereplő drifttag a lokális idő V -vel vett konvolúció által simított változatának negatív gradiense az aktuális pozícióban.

Az öntaszító Brown-féle polimert Norris, Rogers és Williams vezette be 1987-ben az [NRW87] cikkben. Később a [DR92], [CL95] és [CM96] cikkekben a modellt tovább vizsgálták főleg egy dimenzióban. Az [MT08] munka a korábbi eredmények összefoglalóját is tartalmazza. A nemrég elkészült [TTV11] cikkben szuperdiffúzív korlátokat kapunk az egydimenziós öntaszító Brown-féle polimerre.

Az (5) sztochasztikus differenciálegyenletet (3)-mal összehasonlítva világosan látható a viselkedésbeli hasonlóság a rövidlátó öntaszító bolyongással. A skálázási és renormalizációs csoportos érvelések alapján az eredetileg a rövidlátó öntaszító bolyongásra megfogalmazott sejtések ugyanúgy alkalmazhatók az öntaszító Brown-féle polimerre is. Vagyis a dimenziófüggő aszimptotikus skálázási viselkedés, amelyet az imént a rövidlátó öntaszító bolyongás esetére vázoltunk, az öntaszító Brown-féle polimerre is vonatkozik.

A két modellre vonatkozó eredmények áttekintése

A rövidlátó öntaszító bolyongásra vonatkozó első matematikailag precíz eredményt Tóth adta meg 1995-ben a [T95] cikkben. Ő a rövidlátó öntaszító bolyongás módosított változatát, az *éltaszító rövidlátó bolyongást* vizsgálta, ahol a lokális időket \mathbb{Z} *élein* definiálja. A bolyongás lokális időinek sorozatára bizonyított határeloszlás-tételt. A határfolyamat egy Skorohod-értelemben tükrözött Brown-mozgás segítségével adható meg. Egy nagy várható értékű véletlen időben a bolyongó helyzetére megfelelő skálázással lokális határeloszlás-tételt is adott, ezzel igazolva a sejtett $2/3$ -os skálázási kitevő helyességét.

A [T95] bizonyításának kulcsa egy Ray–Knight-féle érvelés, amely az éltaszító rövidlátó bolyongás esetén működik, de az eredeti $X(n)$ csúcstaszító rövidlátó bolyongásra, melyet (2)-ben vezettünk be, nem alkalmazható. A Ray–Knight-elmélet eredeti ötlete a [K63] és [R63] cikkekben található. Az derül ki, hogy az inverz lokális időben megállított éltaszító rövidlátó bolyongás lokálisidő-sorozata Markov-láncot alkot, amely már alaposan tanulmányozható.

Tény, hogy hasonló egyszerűsítés az eredeti csúcstaszító rövidlátó bolyongásnál nem végezhető el. A megfelelő folyamat ebben az esetben ugyanis nem markovi, így a Ray–Knight-megközelítés nem használható. Ezért az eredeti diszkrét idejű csúcstaszító rövidlátó bolyongásra nem is ismert határeloszlás-tétel.

Később Tóth és Werner a [TW98] cikkben megkonstruálta a *valódi öntaszító mozgást* (true self-repelling motion), amely az egydimenziós rövidlátó öntaszító bolyongás skálalimeszének tekinthető. A folyamat konstrukciója bonyolult. A kétdimenziós téridő minden pontjából kiinduló összeolvadó Brown-mozgások nem megszámlálható családján alapul. Ezt a trajektóriarendszert később Brown-féle hálózatnak (Brownian web) nevezték el, ld. [FINR04]. A valódi öntaszító mozgás lokálisidő-profilját a Brown-féle hálózat segítségével lehet megadni, és maga a folyamat ebből visszaállítható. A valódi öntaszító mozgás rendelkezik minden olyan analitikus és sztochasztikus tulajdonsággal, amely az $A^{-2/3}X(\lfloor At \rfloor)$ skálalimeszéről várható, amint $A \rightarrow \infty$. Az éltaszító rövidlátó bolyongásra vonatkozó invarianciaelvet [NR06] tisztázta.

A [T95]-ben (és az ezt követő cikkekben) megjelenő határeloszlás-tételek a bizonyításuk mélyén olyan belső kombinatorikai elemeket tartalmaznak, amelyek nagyon megnehezítik (vagy esetleg lehetetlenné is teszik) a bizonyítások általános érvényű kiterjesztését olyan egydimenziós modellek teljes családjára, amelyeket a saját lokális idejük negatív gradiense irányít. Nemrég azonban sikerült az egydimenziós modellek szuperdiffúzív viselkedését

általánosabban igazolni: a [TTV11] cikkben a szerzők az egydimenziós öntaszító Brown-féle polimerre bizonyítják, hogy $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-5/4} \mathbf{E} (X(t)^2) > 0$ és $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-3/2} \mathbf{E} (X(t)^2) < \infty$. Ezek általános érvényű szuperdiffuzív korlátok (amelyek nem függenek a mikroszkopikus részletektől), de a várt $t^{2/3}$ -os skálázástól még mindig messze vannak.

A következőkben áttekintjük a rövidlátó öntaszító bolyongásra és az öntaszító Brown-féle polimerre vonatkozó legfontosabb eredményeket, amelyek az irodalomban eddig megjelentek.

Egy dimenzió: sejtés $X(n) \sim n^{2/3}$ nem Gauss határfolyamattal;

- Sejtések, renormalizációs csoportos érvelések, [APP83], [PP87];
- éltaszító rövidlátó bolyongás: Tóth [T95] és fent;
- A valódi öntaszító mozgás konstrukciója, amely az egydimenziós rövidlátó öntaszító bolyongás skálalimesze: Tóth és Werner [TW98] és fent;
- Irányított-éltaszító rövidlátó bolyongás: Tóth és Vető [TV08] és 2. fejezet;
- Folytonos idejű csúcstaszító rövidlátó bolyongás: Tóth és Vető [TV11] és 3. fejezet;
- Egydimenziós rövidlátó öntaszító bolyongási modellek online demonstrációja: Vető [V09];
- Szuperdiffuzív korlátok az egydimenziós öntaszító Brown-féle polimerre: Tarrès, Tóth és Valkó [TTV11].

Két dimenzió: sejtés $X(n) \sim n^{1/2} \log^{1/4} n$ Gauss határfolyamattal;

- Sejtések, renormalizációs csoportos érvelések, [APP83], [OP83];
- Szuperdiffuzív korlátok a kétdimenziós öntaszító Brown-féle polimerre: Tóth és Valkó [TV10].

Három és magasabb dimenzió: sejtés $X(n) \sim n^{1/2}$ Gauss határfolyamattal;

- Sejtések, renormalizációs csoportos érvelések, [APP83], [OP83];
- Diffuzív korlátok és centrális határeloszlás-tétel az öntaszító Brown-féle polimerre: Horváth, Tóth és Vető [HTV11] és 4. fejezet;
- Diffuzív korlátok és centrális határeloszlás-tétel a rövidlátó öntaszító bolyongásra: Horváth, Tóth és Vető [HTV11]. Ez az eredmény *nem része a téziseknek*.

1. Tükrözött Brown-trajektóriák

Az egymáson Skorohod-értelemben felfelé vagy lefelé tükrözött (időben ellentétesen futó) egydimenziós Brown-trajektóriák vizsgálata az [STW00] cikkben kezdődött, motivációját pedig a [TW98] cikk adta azzal a konstrukcióval, amelyet ma Brown-féle hálózatnak hívnak, ld. [FINR04]. Az egymáson tükrözött Brown-mozgások nagyon érdekes és időnként meglepő tulajdonságokat mutatnak. További tanulmányok az egymásról Skorohod-értelemben tükrözött Brown-mozgásokról: [SW02], [BN02] és [W07]. Különösen [W07], melyben Warren összeolvadó Brown-trajektóriák két egymással összefonódott családját

vizsgálja, ahol az egyik családhoz tartozó trajektóriák a másiktól Skorohod-értelemben tükröződnek, és az így összeolvadó Brown-mozgások eloszlására determinánsformulát ad.

Warren formulájának egy speciális esete a következő: rögzítsünk egy Brown-mozgást, és erről Skorohod-értelemben két másik Brown-mozgást tükrözzünk felfelé ill. lefelé. E két utóbbi távolsága háromdimenziós Bessel-folyamatként fejlődik. A [TV07] cikk alapján a dolgozatban egy új elemi bizonyítást adunk erre a tényre a Brown-mozgás diszkrét közelítésével és a Donsker-tétel felhasználásával.

Skorohod-tükrözés

Legyen $T \in (0, \infty)$ és $b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy $x(0) \geq b(0)$. A következő állításban szereplő konstrukció Skorohodtól származik. A bizonyítás az [RY99] (VI. fejezet, 2.1. lemma) vagy az [STW00] (2.1. fejezet, 2. lemma) munkákban megtalálható

1.1. állítás. (1) *Egyértelműen létezik az $x_{b\uparrow} : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény a következő tulajdonságokkal:*

- Az $x_{b\uparrow} - b$ függvény nemnegatív.
- Az $x_{b\uparrow} - x$ függvény nemcsökkenő.
- Az $x_{b\uparrow} - x$ függvény csak olyan helyeken nő, ahol $x_{b\uparrow} = b$. Azaz

$$\int_0^T \mathbb{1}(x_{b\uparrow}(t) \neq b(t)) d(x_{b\uparrow}(t) - x(t)) = 0.$$

(2) *A $t \mapsto x_{b\uparrow}(t)$ függvény megadható az*

$$x_{b\uparrow}(t) = x(t) + \sup_{0 \leq s \leq t} (x(s) - b(s))_-$$

formulával.

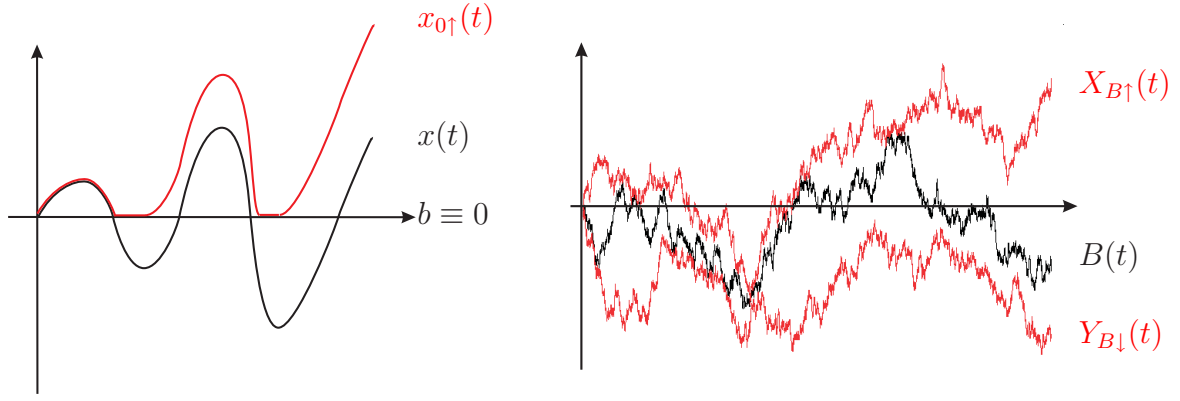
(3) *A $C([0, T)) \times C([0, T)) \ni (b(\cdot), x(\cdot)) \mapsto (b(\cdot), x_{b\uparrow}(\cdot)) \in C([0, T)) \times C([0, T))$ hozzárendelés folytonos a szuprémumtávolsággal.*

A $t \mapsto x_{b\uparrow}(t)$ függvényt az $x(\cdot)$ -nek a $b(\cdot)$ -n felfelé való Skorohod-tükrözöttjének nevezzük. Ahogy a [STW00] cikkben is megtalálható, az $x(\cdot)$ -nek a $b(\cdot)$ -n való Skorohod-feltöltja megfelelőbb elnevezés lenne. A $b(t) = \text{konst.}$ függvényre vonatkozó Skorohod-tükrözés alapvető szerepet játszik a Tanaka-formula precíz megfogalmazásában, ld. [RY99] VI. fejezetét. Ld. továbbá az 1. ábrát.

A $b, y : [0, T) \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre, ahol $y(0) \leq b(0)$, a lefelé való Skorohod-tükrözés vagy Skorohod-letolás a

$$y_{b\downarrow} := -((-y)_{(-b)\uparrow}), \quad y_{b\downarrow}(t) = y(t) - \sup_{0 \leq s \leq t} (y(s) - b(s))_+$$

képlettel definiálható.



1. ábra. Példa a Skorohod-tükrözésre, és az 1.2. tételben szereplő tükrözött Brown-mozgások

A tükrözött Brown-mozgásokra vonatkozó eredmény

Legyen $B(t)$, $X(t)$ és $Y(t)$ három független 0-ból induló standard Brown-mozgás, és legyen

$$X^+(t) := X_{B\uparrow}(t), \quad \widehat{X}(t) := X^+(t) - B(t), \quad (6)$$

$$Y^-(t) := Y_{B\downarrow}(t), \quad \widehat{Y}(t) := -Y^-(t) + B(t), \quad (7)$$

ahogy az 1. ábrán látható. A

$$Z(t) := X^+(t) - Y^-(t) = \widehat{X}(t) + \widehat{Y}(t) \quad (8)$$

különbség a számunkra érdekes mennyiség. Könnyen látható, hogy a $2^{-1/2}\widehat{X}(t)$ és $2^{-1/2}\widehat{Y}(t)$ folyamatok külön-külön standard tükrözött Brown-mozgások, amelyek természetesen össze-függők.

A következő tény a [W07] cikk fő eredményének egy speciális következménye.

1.2. tétel. A $2^{-1/2}Z(t)$ folyamat BES^3 , azaz háromdimenziós Bessel-folyamat:

$$dZ(t) = 2\frac{1}{Z(t)}dt + \sqrt{2}dW(t), \quad Z(0) = 0. \quad (9)$$

A dolgozatban a tétel elemi bizonyítását adjuk.

2. Egydimenziós irányítottél-taszító rövidlátó bolyongás

A [TV08] cikk alapján a rövidlátó öntaszító bolyongás egy olyan variánsát tekintjük a \mathbb{Z} egész rácson, amelynél az öntaszítást az *irányított* éleken vett lokális időkkel definiáljuk. Ez a modell hasonlít a [T95]-ben vizsgálthoz, de a bolyongót itt az *irányított*, nem pedig az irányítatlan éleken vett lokális idők különbségei mozgatják.

Meglepő módon a kapott viselkedés különbözik az irányítatlan élek esetétől. A lokálisidő-folyamatra és a bolyongó helyzetére az idő négyzetgyökével (nem pedig $2/3$ -ik hatványával) arányos térskálázás mellett bizonyítunk határeloszlás-tételeket, de a limeseloszlások különböznek a megszokott diffuzívaktól. A bizonyítások fő összetevője a Ray–Knight-megközelítés.

Határeloszlás-tételt adunk az inverz lokális időben vett lokálisidő-folyamat szuprémum-normában és valószínűségben vett konvergenciájára. Ennek következményeként azt is bizonyítjuk, hogy az inverz lokális idők *determinisztikus érték*hez konvergálnak. Ezután

az inverz lokális időkre vonatkozó határeloszlás-tételből a bolyongó helyzetére vonatkozó lokális határeloszlás-tételt is levezetünk a bolyongót egy nagy várható értékű független geometriai időben megállítva. Vegül a bolyongó helyzetére és lokális idejére mutatunk szimulációs eredményeket. A bolyongás különös skálázási viselkedését az ábrák is mutatják.

A modell definíciója

Legyen w nemcsökkenő és nem konstans súlyfüggvény:

$$w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad w(z+1) \geq w(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - w(-z)) > 0. \quad (10)$$

Az $X(n)$ elsősomszéd-bolyongást tekintjük a \mathbb{Z} egész rácson, amely az $X(0) = 0$ -ból indul, és amelyet a saját lokálisidő-folyamata hajt a w függvényen keresztül a következőképpen. Jelölje $\ell^\pm(n, k)$, $(n, k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ az irányított éleken vett lokális időt:

$$\ell^\pm(n, k) := \#\{0 \leq j \leq n-1 : X(j) = k, X(j+1) = k \pm 1\},$$

ahol $\#\{\dots\}$ a halmaz elemszámát jelöli. A

$$\ell(n, k) := \ell^+(n, k) + \ell^-(n, k+1) \quad (11)$$

jelölést is használni fogjuk, ami a $\langle k, k+1 \rangle$ irányítatlan élen eltöltött idő.

A bolyongás átmenetvalószínűségei

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X(n+1) = X(n) \pm 1 \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{w(\mp(\ell^+(n, X(n)) - \ell^-(n, X(n))))}{w(\ell^+(n, X(n)) - \ell^-(n, X(n))) + w(\ell^-(n, X(n)) - \ell^+(n, X(n)))}, \quad (12) \\ & \ell^\pm(n+1, k) = \ell^\pm(n, x) + \mathbb{1}(X(n) = k, X(n+1) = k \pm 1). \end{aligned}$$

Vagyis a bolyongás minden lépésben azon az irányított élen lép el az aktuális pozícióból legnagyobb valószínűséggel, amelyet a múltban kevésszer használt. Ez a lépési szabály kiegyenlíti és kisimítja a lokális idő irregularitásait.

Fő eredmények

Ahogy a [T95] cikkben is, a bizonyítás kulcsa a Ray–Knight-megközelítés. Legyenek

$$T_{j,r}^\pm := \min\{n \geq 0 : \ell^\pm(n, j) \geq r\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{Z}_+$$

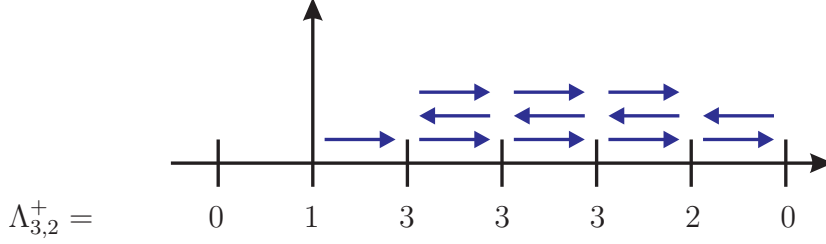
az ún. inverz lokális idők, és

$$\Lambda_{j,r}^\pm(k) := \ell(T_{j,r}^\pm, k) = \ell^+(T_{j,r}^\pm, k) + \ell^-(T_{j,r}^\pm, k+1), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{Z}_+ \quad (13)$$

az inverz lokális időkben megállított bolyongás (irányítatlan éleken vett) lokálisidő-sorozata. Ld. a 2. ábrát. A $T_{j,r}^\pm$ megállási időben a bolyongó által meglátogatott bal- és jobbszélső éleket jelölje

$$\begin{aligned} \lambda_{j,r}^\pm &:= \inf\{k \in \mathbb{Z} : \Lambda_{j,r}^\pm(k) > 0\}, \\ \rho_{j,r}^\pm &:= \sup\{k \in \mathbb{Z} : \Lambda_{j,r}^\pm(k) > 0\}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy rögzített $j \in \mathbb{Z}$ és $r \in \mathbb{Z}_+$ mellett a $T_{j,r}^\pm$, $\rho_{j,r}^\pm - \lambda_{j,r}^\pm$, $\sup_k \Lambda_{j,r}^\pm(k)$ mennyiségek mind végesek. Az inverz lokális időkben megállított bolyongás lokálisidő-folyamatára vonatkozó fő eredmény a következő:



2. ábra. A $T_{3,2}^+ = 12$ inverz lokális időben megállított bolyongás lokálisidő-sorozata

2.1. tétel. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $h \in \mathbb{R}_+$ rögzített. Ekkor

$$A^{-1}\lambda_{[Ax],[Ah]}^\pm \xrightarrow{\mathbf{P}} -|x| - 2h, \quad (14)$$

$$A^{-1}\rho_{[Ax],[Ah]}^\pm \xrightarrow{\mathbf{P}} |x| + 2h, \quad (15)$$

és

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| A^{-1}\Lambda_{[Ax],[Ah]}^\pm([Ay]) - (|x| - |y| + 2h)_+ \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (16)$$

amint $A \rightarrow \infty$.

Vegyük észre, hogy

$$T_{j,r}^\pm = \sum_{k=\lambda_{j,r}^\pm}^{\rho_{j,r}^\pm} \Lambda_{j,r}^\pm(k).$$

Ezért a 2.1. tétel egyenes következménye az alábbi

2.2. következmény. A 2.1. tétel jelöléseivel

$$A^{-2}T_{[Ax],[Ah]}^\pm \xrightarrow{\mathbf{P}} (|x| + 2h)^2 \quad (17)$$

amint $A \rightarrow \infty$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a lokálisidő-folyamat és az inverz lokális idők valószínűségben egy determinisztikus értékhez, nem pedig egy tényleges valószínűségi változóhoz konvergálnak. Ezért ez az eset valamelyest hasonlít a [T97] cikkben tárgyalt gyengén önvonzó bolyongáshoz.

Legyen

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}(|x| \leq \sqrt{t})$$

az $\text{UNI}(-\sqrt{t}, \sqrt{t})$ eloszlás sűrűségfüggvénye, amely a bolyongás skálalimeszének peremeloszlására adódó természetes jelölt. A bolyongó helyzetére vonatkozó *lokális határeloszlás-tétel* bizonyításához időbeli simításra van szükség, amelyet Laplace-transzformációval valósítunk meg. Legyen

$$\widehat{\varphi}(s, x) := s \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t, x) dt = \sqrt{s\pi} (1 - \Phi(\sqrt{2s}|x|)),$$

ahol $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ a standard normális eloszlásfüggvény.

2.3. tétel. Legyen $s \in \mathbb{R}_+$ rögzített és $\theta_{s/A}$ geometriai eloszlású valószínűségi változó,

$$\mathbf{P}(\theta_{s/A} = n) = (1 - e^{-s/A})e^{-sn/A}, \quad (18)$$

amely független az $X(n)$ bolyongástól. Ekkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$A^{1/2}\mathbf{P}(X(\theta_{s/A}) = \lfloor A^{1/2}x \rfloor) \rightarrow \widehat{\varphi}(s, x)$$

amint $A \rightarrow \infty$.

A (14) és (15) formulákból az $(A^{-1/2}X(\lfloor At \rfloor))_{A \geq 1}$ eloszlások feszsége könnyen következik. Ezért a 2.3. tétel alapján ha az $X(\cdot)$ bolyongásnak van valamilyen skálalimesze, akkor

$$A^{-1/2}X(\lfloor At \rfloor) \implies \text{UNI}(-\sqrt{t}, \sqrt{t}). \quad (19)$$

A határeloszlás-tételek bizonyításának vázlata

A 2.1. tétel bizonyítása a következőképpen épül fel. Minden $k \in \mathbb{Z}$ csúcshoz azonos eloszlású η_k segéd Markov-lánccokat vezetünk be. Ezen Markov-lánccok lényegében a szomszédos éleken a lokális idők különbségeit mutatják. Ezen Markov-lánccok eloszlását vizsgáljuk, meghatározzuk a ρ stacionárius mértéket, és exponenciális becslést adunk a stacionárius eloszláshoz való konvergencia sebességére. A stacionárius várható érték $-1/2$ -nek adódik.

Az η_k -k függetlensége miatt az

$$L_{j,r}(k) := \ell^+(T_{j,r}^+, k)$$

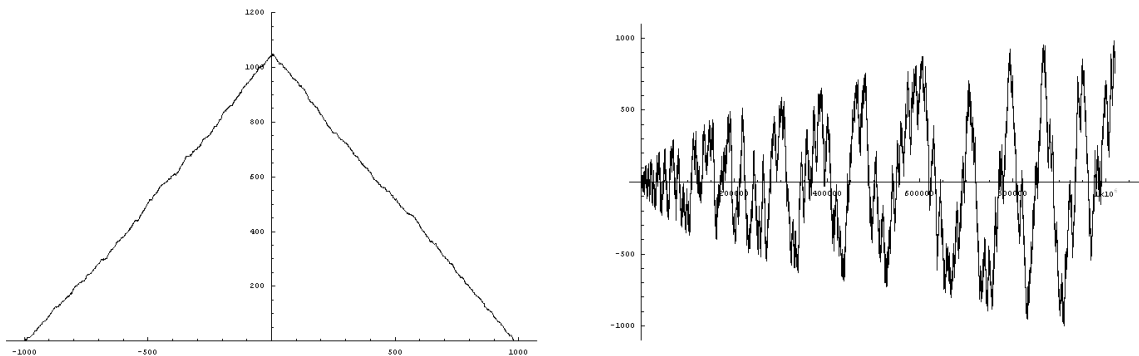
lokálisidő-sorozat (amely lényegében $\Lambda_{j,r}^\pm$ „fele”) bolyongásként reprezentálható rögzített $j \in \mathbb{Z}_-$ és $r \in \mathbb{Z}_+$ esetén, vagyis követhetjük a Ray – Knight-megközelítést. Levezethető, hogy

$$\begin{aligned} L_{j,r}(j) &= r, \\ L_{j,r}(k+1) &= L_{j,r}(k) + 1 + \eta_{k+1}(L_{j,r}(k) + 1), & j \leq k < 0, \\ L_{j,r}(k+1) &= L_{j,r}(k) + \eta_{k+1}(L_{j,r}(k)), & 0 \leq k < \infty, \\ L_{j,r}(k-1) &= L_{j,r}(k) + \eta_k(L_{j,r}(k)), & -\infty < k \leq j. \end{aligned} \quad (20)$$

Ezekből a formulákból következik, hogy a $j \in \mathbb{Z}_-$ pozícióból kiindulva a lokális idők $L_{j,r}(k)$ sorozata lépésenként generálható mindig egy új független valószínűségi változót hozzáadva, azaz úgy, mint egy bolyongás. Vegyük észre, hogy j és 0 között a várható lépésmagyság $1/2$, 0 fölött $-1/2$ és j alatt visszafelé ismét $-1/2$. Ez összhangban van (16)-tal. Ezen a ponton azt kell megmutatni, hogy az $L_{j,r}(k)$ kétirányú bolyongás nem nagyon tér el a várható értékétől.

A skálázáshoz a $j = \lfloor Ax \rfloor$ és az $r = \lfloor Ah \rfloor$ értékeket választjuk. Bizonyítható, hogy amíg $L_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k) > A^{1/2+\varepsilon}$, addig az η_k Markov-lánccok, amelyek az $L_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k) - L_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k-1)$ növekményekben jelennek meg, exponenciálisan közel vannak a stacionárius eloszlásukhoz. Ez lehetővé teszi a hatékony csatolást független azonos eloszlású *stacionárius* $\tilde{\eta}_k(m)$ példányokkal, vagyis amelyekre $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_k(m) = x) = \rho(x)$ teljesül minden $k \in \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}$ esetén.

A (20) formulában az η_k -kat $\tilde{\eta}_k$ -kkal helyettesítve definiálható $\tilde{L}_{j,r}(k)$ ρ eloszlású növekményekkel. Szokásos nagyeltérés-becslésből adódik, hogy az $\tilde{L}_{j,r}$ bolyongás fluktuációja a várható érték körül nagy valószínűséggel $A^{1/2+\varepsilon}$ alatt marad. A csatolás konstrukciója alapján látható, hogy nagy valószínűséggel $L_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k) = \tilde{L}_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k)$ teljesül,



3. ábra. A bolyongás lokálisidő-folyamata és trajektóriája $w(k) = 10^k$ rátafüggvénnyel

amíg mindkét folyamat az $A^{1/2+\varepsilon}$ küszöb fölött van. A csatolás már nem működik, ha $L_{\lfloor Ax \rfloor, \lfloor Ah \rfloor}(k)$ a 0 közelébe kerül, de megmutatható, hogy amint ez megtörténik, nagy valószínűséggel L lineáris, tehát $A^{1/2+\varepsilon}$ idő alatt eléri a 0-t. Ezzel a 2.1. tétel bizonyítása teljes.

A 2.3. tétel bizonyításának fő azonossága

$$\mathbf{P}(X(n) = k) = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{P}(T_{k-1,m}^+ = n) + \mathbf{P}(T_{k+1,m}^- = n)), \quad (21)$$

amely az $X(n)$ elmozdulás eloszlását hozza kapcsolatba a $T_{k,m}^{\pm}$ inverz lokális idők eloszlásával. Ezért a 2.2. következményben kimondott határeloszlás-tétel alkalmazható.

Szimulációs eredmények

A 3. ábrán szimulációs eredményeket mutatunk be. Az első grafikon a $w(k) = 10^k$ függvényhez tartozó bolyongás lokálisidő-folyamatát mutatja kb. 10^6 lépés után. Pontosabban a $\Lambda_{100,800}^+$ függvény értékei láthatók. A másik grafikonon a megfelelő trajektóriát ábrázoltuk.

A lokálisidő-folyamat látható egyezést mutat a 2.1. tételnek megfelelő elméleti értékekkel. A trajektória még érdekesebb. Itt jól kirajzolódnak a $-\sqrt{t}$ -nél és \sqrt{t} -nél húzódó alsó és felső burkolók. Másrészt a bolyongó nagyon gyorsan oszcillál ezen két extrém érték között. Szinte visszafordulás nélküli átmetszések láthatók $-\sqrt{t}$ és \sqrt{t} között mindkét irányban. Ez azt is alátámasztja, hogy az irányítottél-taszító rövidlátó bolyongásnak nem létezik folytonos skálalimesze.

Amikor a bolyongó új területekre ér, pl. túllépi a korábbi maximumát, akkor a visszafordulás valószínűsége w -tól függetlenül $1/2$, hiszen mindkét kimenő élen a lokális idő 0. Ez heurisztikus magyarázatot ad arra, hogy a $-\sqrt{t}$ -nél és \sqrt{t} -nél húzódó alsó és felső burkoló miért univerzális.

3. Egydimenziós folytonos idejű csúcstaszító rövidlátó bolyongás

Ebben a fejezetben és a [TV11] cikkben az egydimenziós *folytonos idejű csúcstaszító rövidlátó bolyongást* vizsgáljuk. A Ray–Knight-módszer, amely először a [T95] cikkben

jelent meg és amelyet a 2. fejezetben is alkalmazunk a diszkrét idejű éltaszító esetére a rövidlátó öntaszító bolyongásnak, módosítva a jelen modellre is felhasználható. A bolyongás lokálisidő-folyamatára adunk határeloszlás-tételt, ill. lokális határeloszlás-tételt a bolyongó helyzetére. A fejezet fő ötletei hasonlóak a [T95] cikkben alkalmazottakhoz, de lényeges különbségek is vannak. Például új csatolási érveléseket alkalmazunk a bizonyítás során.

A tekintett bolyongás és a fő eredmények

Bevezetjük a rövidlátó öntaszító bolyongás folytonos idejű változatát, amely a (3) formulával definiált modell megfelelője, és amelyre a Ray–Knight-módszer alkalmazható lesz. Legyen $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ folytonos idejű $X(0) = 0$ -ból induló bolyongás \mathbb{Z} -n jobbról folytonos trajektóriákkal. Lokális idejét a csúcson adott $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}$ esetén jelölje

$$\ell(t, x) := |\{s \in [0, t) : X(s) = x\}|, \quad (22)$$

ahol $|\{\dots\}|$ a halmaz Lebesgue-mértéke. Legyen $w : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ majdnem tetszőleges rátafüggvény. Azt tesszük fel róla, hogy nemcsökkenő és hogy nem konstans.

A bolyongás a

$$\mathbf{P}(X(t + dt) = x \pm 1 \mid \mathcal{F}_t, X(t) = x) = w(\ell(t, x) - \ell(t, x \pm 1)) dt + o(dt), \quad (23)$$

$$\dot{\ell}(t, x) = \mathbf{1}(X(t) = x) \quad (24)$$

ráták és differenciálegyenlet szerint fejlődik az

$$X(0) = 0, \quad \ell(0, x) = 0$$

kezdeti feltétellel. A (24)-ben szereplő pont időderiváltat jelöl. Vegyük észre, hogy exponenciális $w(u) = \exp\{\beta u\}$ súlyfüggvény esetén ez azt jelenti, hogy t -ben bekövetkező ugrást feltételezve az adott helyről való jobbra ill. balra ugrások valószínűségei éppen $e^{-\beta \ell(t, x \pm 1)} / (e^{-\beta \ell(t, x+1)} + e^{-\beta \ell(t, x-1)})$, ahogyan (2)-ben.

Rögzítsük a $j \in \mathbb{Z}$ és $r \in \mathbb{R}_+$ értékeket. Az $X(t)$ bolyongást $t = 0$ -ból a

$$T_{j,r} = \inf\{t \geq 0 : \ell(t, j) \geq r\} \quad (25)$$

megállási időig futtassuk, ami az inverz lokális idő a modellünkben. Vezessük be az X folyamat inverz lokális időben megállított

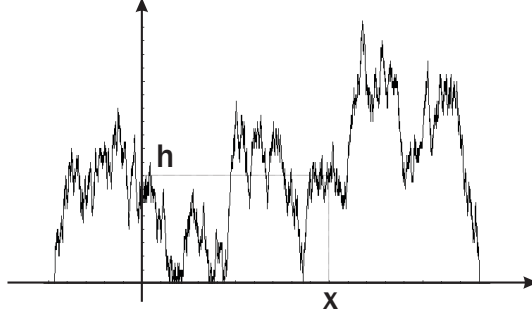
$$\Lambda_{j,r}(k) := \ell(T_{j,r}, k) \quad k \in \mathbb{Z} \quad (26)$$

lokálisidő-folyamatát. Legyen

$$\begin{aligned} \lambda_{j,r} &:= \inf\{k \in \mathbb{Z} : \Lambda_{j,r}(k) > 0\}, \\ \rho_{j,r} &:= \sup\{k \in \mathbb{Z} : \Lambda_{j,r}(k) > 0\}. \end{aligned}$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $h \in \mathbb{R}_+$ rögzített. Tekintsük a $W_{x,h}(y)$, $y \in \mathbb{R}$ kétirányú tükrözött és elnyelt Brown-mozgást, amely a $W_{x,h}(x) = h$ -ból indul. Ld. a 4. ábrát. Vezessük be a $[0, x]$ vagy $[x, 0]$ intervallumon kívül a 0 első elérési idejét

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{x,h} &:= \sup\{y < 0 \wedge x : W_{x,h}(y) = 0\}, \\ \mathfrak{r}_{x,h} &:= \inf\{y > 0 \vee x : W_{x,h}(y) = 0\}, \end{aligned}$$



4. ábra. A $W_{x,h}$ kétirányú tükrözött és elnyelt Brown-mozgás

ahol $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, és legyen

$$\mathcal{T}_{x,h} := \int_{\mathfrak{l}_{x,h}}^{\mathfrak{r}_{x,h}} W_{x,h}(y) dy. \quad (27)$$

A fejezet fő eredménye a következő.

3.1. tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $h \in \mathbb{R}_+$ rögzített. Ekkor*

$$A^{-1} \lambda_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]} \implies \mathfrak{l}_{0 \wedge x, h}, \quad (28)$$

$$A^{-1} \rho_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]} \implies \mathfrak{r}_{0 \vee x, h}, \quad (29)$$

és

$$\left(\frac{\Lambda_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]}(\lfloor Ay \rfloor)}{\sigma \sqrt{A}}, \frac{\lambda_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]}}{A} \leq y \leq \frac{\rho_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]}}{A} \right) \quad (30)$$

$$\implies (W_{x,h}(y), \mathfrak{l}_{0 \wedge x, h} \leq y \leq \mathfrak{r}_{0 \vee x, h})$$

amint $A \rightarrow \infty$ ahol $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \rho(du) \in (0, \infty)$ és ahol ρ explicit módon megadható.

3.2. következmény. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ és $h \geq 0$ esetén*

$$\frac{T_{[Ax], [\sqrt{A}\sigma h]}}{\sigma A^{3/2}} \implies \mathcal{T}_{x,h}. \quad (31)$$

A 3.3. tétel kimondásához további definíciókra van szükség. (27)-ből következik, hogy $\mathcal{T}_{x,h}$ abszolút folytonos eloszlású. Legyen

$$\varphi(t, x) := \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{T}_{x,h} < t) dh. \quad (32)$$

A [T95] cikk 2. tétele szerint rögzített $t > 0$ esetén $\varphi(t, \cdot)$ egy valószínűségeloszlás sűrűségfüggvénye, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x) dx = 1$. Várható lenne, hogy $\varphi(t, \cdot)$ legyen $X(At)/A^{2/3}$ határértékének sűrűségfüggvénye, amint $A \rightarrow \infty$, de ehelyett a Laplace-transzformáltakra bizonyítunk hasonló állítást. Jelölje $\widehat{\varphi}$ a φ függvény Laplace-transzformáltját:

$$\widehat{\varphi}(s, x) := s \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t, x) dt. \quad (33)$$

3.3. tétel. *Legyen $s \in \mathbb{R}_+$ rögzített és $\theta_{s/A}$ egy A/s várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amely független az $X(t)$ bolyongástól. Ekkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$A^{2/3} \mathbf{P}(X(\theta_{s/A}) = \lfloor A^{2/3} x \rfloor) \rightarrow \widehat{\varphi}(s, x) \quad (34)$$

amint $A \rightarrow \infty$.

4. Centrális határeloszlás-tétel a három- és magasabb dimenziós öntaszító Brown-féle polimerre

A rövidlátó öntaszító bolyongás folytonos térbeli és időbeli megfelelőjeként az öntaszító Brown-féle polimer aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk a tranziens dimenziókban. Először a [TTV11] cikkbeli egydimenziós eredmények kiterjesztéseként a részecske helyzetéből nézett környezetnek (amely lényegében a folyamat kisimított lokális ideje) egy természetes időben stacionárius és ergodikus mértékét azonosítjuk. A fő eredmény, hogy három és magasabb dimenzióban ezen stacionárius (és ergodikus) esetben a mozgó részecske helyzete diffúzívan skálázható és a véges dimenziós eloszlások egy Wiener-folyamatéhoz tartanak.

Jelen fejezet eredményei, melyek a [HTV11] cikken alapulnak, részben megválaszolják az [APP83] cikkben megfogalmazott sejtéseket. Ezen sejtések skálázási és renormalizációs csoportos érveléseken múltak, de a dolgozatban precíz bizonyításokat adunk, amelyek az első matematikai eredmények magas dimenziókban. A felhasznált fő eszköz az ergodikus Markov-folyamatok additív funkcionáljaira vonatkozó Kipnis–Varadhan-féle centrális határeloszlás-tétel nemreverzibilis változata és a Sethuraman, Varadhan és Yau által bevezetett *lépcsős szektorfeltétel*, ld. [SVY00].

A modell definíciója és háttere

Az öntaszító Brown-féle polimer a következőképpen adható meg. Az alábbi definíció pontosabb, mint a (4)–(5)-ben megadott. Legyen $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ közelítő egység, azaz sima (C^∞) gömbszimmetrikus végtelenben gyors lecsengésű, és legyen

$$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad F(x) := -\text{grad } V(x). \quad (35)$$

Továbbá a V függvényre a következő *pozitivitási feltételt* is kiszabjuk:

$$\widehat{V}(p) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ip \cdot x} V(x) dx \geq 0. \quad (36)$$

Egy lehetséges választás például $V(x) := \exp\{-|x|^2/2\}$.

Legyen $t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^d$ standard d dimenziós Brown-mozgás, és a $t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^d$ sztochasztikus folyamat legyen a

$$dX(t) = dB(t) + \left(\int_0^t F(X(t) - X(u)) du \right) dt \quad (37)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása.

Bevezetjük a lokális idő mértékét:

$$\ell(t, A) := \ell(0, A) + |\{0 < s \leq t : X(s) \in A\}|, \quad (38)$$

ahol $A \subset \mathbb{R}^d$ mérhető tartomány, és $\ell(0, A)$ előjeles kezdeti érték. A (37) egyenlet ekvivalens (5)-tel. Ebben a fejezetben a három- vagy magasabb dimenziós öntaszító Brown-féle polimerrel foglalkozunk.

A centrális határeloszlás-tétel bizonyítása itt az ergodikus Markov-folyamatok additív funkcionáljainak martingálközelítésén keresztül történik, ahogy ez a reverzibilis folyamatok esetén a klasszikus Kipnis–Varadhan-cikkben [KV86] és a későbbi nemreverzibilis kiterjesztésekben olvasható, ld. [T86], [V96] és [SVY00]. Ezt a megközelítést *Kipnis–Varadhan-elméletnek* nevezzük. A hatékony martingálközelítés létezése az [SVY00] cikkben szereplő *lépcsős szektorfeltétel*ből következik.

A következőkben az állapotteret és rajta egy Gauss-mértéket adunk meg. Ezen a téren bevezetjük a környezetfolyamatot, amely stacionárius lesz az adott mértékkel. Ezután kimondjuk a fő eredményeket és vázoljuk a bizonyítást.

Állapotter, Gauss-mérték és környezetfolyamat

Az alapfolyamatok megfelelő állapottere a végtelenben lassan növvő sima skalármezők tere, vagyis $\Omega := \{\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}) : \|\omega\|_{m,r} < \infty\}$ ahol $\|\omega\|_{m,r} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{-1/r} \left| \partial_{m_1, \dots, m_d}^{[m]} \omega(x) \right|$ félnormák minden $m = (m_1, \dots, m_d)$ $m_j \geq 0$ multiindexre; és $r \geq 1$ esetén. Az Ω tér ezen félnormákkal Fréchet-tér.

A [TTV11] cikkben bemutatott egydimenziós stacionárius mértékhez hasonlóan célunk \mathbb{R}^d pontjaihoz

$$\mathbf{E}(\omega(x)) = 0, \quad C(x-y) := \mathbf{E}(\omega(x)\omega(y)) = g * V(x-y) \quad (39)$$

várható értékű és kovarianciájú Gauss-változókat rendelni, ahol

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := |x|^{2-d} \quad (40)$$

az \mathbb{R}^d vett Laplace-operátor Green-függvénye. A Minlos-tételből (ld. [S74]) következik, hogy ilyen valószínűségi Gauss-mérték egyértelműen létezik az Ω téren. A fejezet során végig feltesszük, hogy $d \geq 3$. Ez a mérték a 0 *tömegű szabad Gauss-mező*, amelynek ibolyán túli szingularitását a sima és gyorsan lecsengő V közelítő egységgel vett konvolúcióval simítjuk.

A $\tau_z : \Omega \rightarrow \Omega$, $(\tau_z \omega)(x) := \omega(x+z)$ $z \in \mathbb{R}^d$ eltoláscsoport természetes módon hat Ω -n, és megőrzi a $\pi(d\omega)$ valószínűségi mértéket. Az $(\Omega, \pi(d\omega), \tau_z : z \in \mathbb{R}^d)$ dinamikai rendszer *ergodikus*.

A környezetfolyamat legyen a kisimított lokálisidő-profil a részecskéhez rögzített mozgó koordinátarendszerből nézve, amely (5) és (37) jobb oldalán is megjelenik. Jelölje ezt $\eta(t) = (\eta(t, x))_{x \in \mathbb{Z}}$, ahol

$$\eta(t, x) := \eta(0, X(t) + x) + \int_0^t V(X(t) + x - X(u)) du = (V * \ell(t, \cdot))(X(t) + x). \quad (41)$$

Vegyük észre, hogy $\eta(t)$ Markov-folyamat az Ω téren. Meglepő módon a (39)-cel definiált Gauss-mérték természetes *időben stacionárius és ergodikus* mértéke a (41)-ben adott folyamatnak. Minden további eredményt a stacionárius eloszlásból indított folyamatra értünk.

A fejezet fő eredménye a $t \mapsto X(t)$ folyamat diffuzív határértékére vonatkozik. Az (5) és (41) egyenletekből az következik, hogy az elmozdulás

$$X(t) = B(t) + \int_0^t \varphi(\eta(s)) ds \quad (42)$$

alakban írható, ahol $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ a $t \mapsto \eta(t)$ stacionárius és ergodikus Markov-folyamat állapotterén értelmezett függvény:

$$\varphi(\omega) = -\text{grad} \omega(0). \quad (43)$$

Eredmények

4.1. tétel. *A $\pi(d\omega)$ valószínűségi Gauss-mérték az Ω téren 0 várható értékkel és a (39)-ben megadott kovarianciával időben invariáns és ergodikus mértéke a $t \mapsto \eta(t)$ Ω -értékű Markov-folyamatnak.*

4.2. következmény. *π -majdnem minden $\eta(0, \cdot)$ kezdeti eloszlásra*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = 0 \quad \text{m.b.} \quad (44)$$

Megjegyzés. Világos, hogy három és magasabb dimenzióban a $t \mapsto \eta(t)$ folyamatnak más stacionárius eloszlása is van. Például a $t \mapsto X(t)$ folyamat tranzienciája miatt az „üres” $\eta(0, x) \equiv 0$ kezdeti értékből elért stacionárius mérték biztosan különbözik $d\pi$ -től. A módszereink és eredményeink erre a $d\pi$ stacionárius eloszlásra érvényesek.

A fejezet fő eredménye a következő tétel:

4.3. tétel. *Három és magasabb dimenzióban a következők teljesülnek:*

1. *A*

$$\sigma^2 := d^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbf{E} (|X(t)|^2) \quad (45)$$

aszimptotikus szórásnégyzet létezik, és

$$1 \leq \sigma^2 \leq 1 + \rho^2, \quad (46)$$

ahol

$$\rho^2 := d^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |p|^{-2} \widehat{V}(p) \, dp < \infty. \quad (47)$$

2. *Az*

$$X_N(t) := \frac{X(Nt)}{\sigma \sqrt{N}} \quad (48)$$

diffuzív módon skálázott folyamat véges dimenziós peremeloszlásai egy standard d dimenziós Brown-mozgáshoz tartanak. A konvergencia az $\eta(0)$ kezdőértékre a $d\pi$ eloszlás szerint valószínűségben értendő.

Megjegyzés. Ahogy a tételben is szerepel, az eredmények az $\eta(0, x)$ kezdeti érték szerint *valószínűségben* értendők a fent definiált stacionárius (és ergodikus) kezdeti eloszlással. Cuny és Peligrad [CP10] nemrég megjelent munkája reményt adhat a Kipnis–Varadhan-elmélet kiterjesztésére *majdnem minden* kezdeti értékre teljesülő centrális határeloszlás-tételle a stacionárius mérték szerint.

A határeloszlás-tétel bizonyításának vázlata

Először bevezetjük a $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \pi)$ Gauss–Hilbert-teret, amelyen az $\eta(t)$ folyamat infinitezimális generátora hat. Ez egy szintezett Hilbert tér, vagyis

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad (49)$$

végtelen sok ortogonális altér direkt összege.

Az $\eta(t)$ folyamat G infinitezimális generátora

$$G = \frac{1}{2}\Delta + \sum_{l=1}^d (a_l^* \nabla_l + \nabla_l a_l) \quad (50)$$

alakban írható, ahol $a_l^* \upharpoonright_{\mathcal{H}_n}: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ keltő- és $a_l \upharpoonright_{\mathcal{H}_n}: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}$ kioltóoperátor. Ezek egymás adjungáltjai. ∇_l az l -edik irányú másodkvantált deriválás, és $\Delta = \sum_{l=1}^d \nabla_l^2$. G felbontható $G = -S + A$ alakban, ahol S az önadjungált és A a ferdén önadjungált rész. Látható, hogy az

$$S = -\frac{1}{2}\Delta, \quad A = \sum_{l=1}^d (a_l^* \nabla_l + \nabla_l a_l)$$

operátorok léteznek jól definiált önadjungált ill. ferdén önadjungált operátorként.

A modell természetes szimmetriája, hogy $\eta(t)$ rendelkezik a *Jaglom-reverzibilitás* tulajdonságával, vagyis hogy a stacionárius eloszlásból induló ellentettjére váltott és időben visszafelé haladó $\tilde{\eta}(t) = -\eta(-t)$ folyamat eloszlásban megegyezik az eredeti $\eta(t)$ -vel. Ez a tulajdonság később nagyon hasznos lesz. Az $\eta(t)$ folyamat ergodicitása majdnem közvetlenül a definícióból látható, ezért a 4.1. tétel következik.

Az öntaszító Brown-féle polimer $X(t)$ elmozdulására vonatkozó centrális határeloszlás-tétel bizonyításának kiindulópontja a (42) egyenlet. Ebben a felírásban $B(t)$ egy Brown-mozgás és az integrálandó az $\eta(t)$ Markov-folyamat additív funkcionálja. Ezért a Kipnis–Varadhan-tétel egy változatának alkalmazása a cél.

Az eredeti Kipnis–Varadhan-tétel a [KV86] cikkben jelent meg általános reverzibilis Markov-folyamatokra, vagyis ahol a generátor ferdén önadjungált része $A = 0$ eltűnik. Tóth a [T86] cikkben a nemreverzibilis esetben adott elégséges feltételt a centrális határeloszlás-tétel teljesülésére. A tér szintézése (49) esetén a *lépcsős szektorfeltétel* elégséges a centrális határeloszlás-tételhez, amely az

$$\|S^{-1/2}AS^{-1/2} \upharpoonright_{\mathcal{H}_n}\| \leq Cn^\gamma \quad (51)$$

becslést jelenti valamely $\gamma < 1$ -gyel. A függvényre az

$$\|S^{-1/2}f\| < \infty \quad (52)$$

H_{-1} -korlátnak is teljesülnie kell. Az [SVY00] cikkben a szerzők bizonyítják, hogy az (51) és (52) feltételekből az

$$\int_0^t f(\eta(s)) ds \quad (53)$$

integrálra a centrális határeloszlás-tétel következik.

Ezt a tételt alkalmazzuk az öntaszító Brown-féle polimerre, és igazoljuk az (51) és (52) feltételeket. Könnyű látni, hogy $\|\nabla_l|\Delta|^{-1/2}\| \leq 1$, és a

$$\| |\Delta|^{-1/2}a_l^* \upharpoonright_{\mathcal{H}_n} \| \leq Cn^{1/2}$$

becslés számolás alapján megmutatható. Ezért az (51) feltétel $\gamma = 1/2$ -del következik.

Az (52) H_{-1} -korlátot egy [SVY00]-ban szereplő lemma segítségével látjuk be. Ez azt mondja ki, hogy a (42)-ben szereplő integrálandó aszimptotikus szórásnégyzete felülről becsülhető egy ugyanazon állapottéren definiált $\xi(t)$ másik Markov-folyamat trajektóriája mentén ugyanazon függvény integráljának szórásnégyzetével. Itt $\xi(t)$ egy reverzibilis

Markov-folyamat, melynek infinitezimális generátora $-S$, amely az $\eta(t)$ G generátorának szimmetrikus része. Az öntaszító Brown-féle polimer esetén $\xi(t)$ diffúzió véletlen tájon, ezért az integrál aszimptotikus szórásnégyzete kiszámítható, és ez három vagy magasabb dimenzióban végesnek adódik.

(46) megmutatásához diffuzív alsó korlátokra is szükség van. Ezzel azt az esetet zárjuk ki, hogy a (42)-ben szereplő integráltag diffuzív határfolyamata kiejtse a martingáltagot, amely ez esetben Brown-mozgás. Ez elvileg megtörténhetne, ahogy az egydimenziós elsőszomszéd egyszerű kizárásos folyamat közismert esetében, ld. [A83]. A diffuzív alsó korlát az öntaszító Brown-féle polimermodell Jaglom-reverzibilitásából adódik.

További eredmények és konklúzió

Hogy teljes képet nyújthassunk az olvasónak, megjegyezzük, hogy a rövidlátó öntaszító bolyongást három és magasabb dimenziókban ill. az öntaszító Brown-féle polimert egy és két dimenzióban is vizsgálták a kövekmúltban.

A [HTV11] cikkben a magas dimenziós rövidlátó öntaszító bolyongásra is diffuzív korlátokat és centrális határeloszlás-tételt adunk. Az eredmények kimondása hasonló a 4.3. tételhez, de ez *nem szerepel jelen dolgozat téziseiben*.

Egy dimenzióban Tarrès, Tóth és Valkó lényegében a

$$C_1 t^{5/4} \leq \mathbf{E} (|X(t)|^2) \leq C_2 t^{3/2} \quad (54)$$

becsléseket bizonyították az öntaszító Brown-féle polimer elmozdulására a V függvényre vonatkozó bizonyos feltételekkel, ahol $0 < C_1 < C_2 < \infty$ konstansok, ld. [TTV11].

Másrészt Tóth és Valkó a [TV10] cikkben többek között azt igazolták, hogy a kétdimenziós öntaszító Brown-féle polimerre a

$$C_3 t \log \log t \leq \mathbf{E} (|X(t)|^2) \leq C_4 t \log t \quad (55)$$

szuperdiffuzív korlátok teljesülnek valamely $0 < C_3 < C_4 < \infty$ konstansokkal.

Az (54) és (55) korlátok ugyan még nem az 1980-as években a rövidlátó öntaszító bolyongásra megsejtett nagyságrendet adják, de robusztus becslések, amelyek a modell sajátosságaitól nem függnek. Ezen új eredmények létezése is bizonyítja, hogy az öntaszító bolyongások problémája a modern valószínűségszámítás központi témaköre.

Nyitott kérdések széles skálája ad lehetőséget további kutatásra. Az [APP83] cikk sejtései még mindig megoldatlanok általában. Jelen dolgozat és az idézett munkák eredményei is csak bizonyos megszorítások mellett érvényesek. Például a Ray – Knight-megközelítés, amely egyébként hasznos eszköz lehetne, kombinatorikai okok miatt nem terjeszthető ki az itt tárgyalt modelleken túlra. Kérdésként merül fel az egy- és kétdimenziós rövidlátó öntaszító bolyongásra vonatkozó általános szuperdiffuzív korlátok bizonyítása.

A kritikus dimenzió felett alkalmazott funkcionálanalízisbeli eszközök, amelyeket a 4. fejezetben használtunk, csak a lokális idők *stacionárius* kezdeti értékei mellett érvényesek. Természetes kérdés más (leginkább azonosan 0) kezdeti feltételt tekinteni. A [CP10] nemrég megjelent cikk majdnem minden kezdeti érték mellett ad centrális határeloszlás-tételt reverzibilis Markov-folyamatok additív funkcionáljaira, de az ott alkalmazott módszerek nem tűnnek közvetlenül átvihetőnek jelen esetre, másrészt nem igazak azonosan 0 kezdeti feltételre. Az elkövetkező kutatás másik lehetséges iránya a funkcionálanalízisbeli eszközök kiterjesztése más típusú modellekre, például véletlen közegű bolyongásra, amely már egy új kutatási feladat kiindulópontja.

Hivatkozások

- [APP83] D. Amit, G. Parisi, L. Peliti: Asymptotic behavior of the ‘true’ self-avoiding walk. *Phys. Rev. B*, **27**: 1635–1645 (1983)
- [A83] R. Arratia: The motion of a tagged particle in the simple symmetric exclusion system on \mathbb{Z} . *Ann. Probab.*, **11**: 362–373 (1983)
- [BN02] K. Burdzy, D. Nualart: Brownian motion reflected on Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, **122**: 471–493 (2002)
- [CL95] M. Cranston, Y. Le Jan: Self-attracting diffusions: two case studies. *Math. Ann.*, **303**: 87–93 (1995)
- [CM96] M. Cranston, T. S. Mountford: The strong law of large numbers for a Brownian polymer. *Ann. Probab.*, **24**: 1300–1323 (1996)
- [CP10] C. Cuny, M. Peligrad: Central limit theorem started at a point for stationary processes and additive functionals of reversible Markov chains. *J. Theoret. Probab.*, **23**: 1–18 (2010)
- [DR92] R. T. Durrett, L. C. G. Rogers: Asymptotic behavior of Brownian polymers. *Probab. Theory Related Fields*, **92**: 337–349 (1992)
- [FINR04] L. R. G. Fontes, M. Isopi, C.M. Newman, K. Ravishankar: The Brownian Web: characterization and convergence. *Ann. Probab.*, **32**: 2857–2883 (2004)
- [HTV11] I. A. Horváth, B. Tóth, and B. Vető: Diffusive limits for “true” (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in $d \geq 3$. *Közlésre elfogadva, Probab. Theory Related Fields* (2011)
- [K63] F. B. Knight: Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. *Transactions of the AMS*, **109**: 56–86 (1963)
- [KV86] C. Kipnis, S. R. S. Varadhan: Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes with applications to simple exclusion. *Comm. Math. Phys.*, **106**: 1–19 (1986)
- [MT08] T. S. Mountford, P. Tarrès: An asymptotic result for Brownian polymers. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **44**: 29–46 (2008)
- [NR06] C. M. Newman and K. Ravishankar: Convergence of the Tóth lattice filling curve to the Tóth–Werner plane filling curve. *ALEA – Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **1**: 333–346 (2006)
- [NRW87] J. R. Norris, L. C. G. Rogers, D. Williams: Self-avoiding walk: a Brownian motion model with local time drift. *Probab. Theory Related Fields*, **74**: 271–287 (1987)
- [OP83] S. P. Obukhov, L. Peliti: Renormalisation of the “true” self-avoiding walk. *J. Phys. A*, **16**: L147–L151 (1983)
- [PP87] L. Peliti, L. Pietronero: Random walks with memory. *Riv. Nuovo Cimento*, **10**: 1–33 (1987)

- [R63] D. Ray: Sojourn times of a diffusion process. *Illinois J. Math.*, **7**: 615–630 (1963)
- [RY99] D. Revuz, M. Yor: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third Edition, Springer, 1999
- [SVY00] S. Sethuraman, S. R. S. Varadhan, H-T. Yau: Diffusive limit of a tagged particle in asymmetric simple exclusion processes. *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**: 972–1006 (2000)
- [S74] B. Simon: *The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*. Princeton University Press, 1974.
- [STW00] F. Soucaliuc, B. Tóth, W. Werner: Reflection and coalescence between independent one-dimensional Brownian paths. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **36**: 509–545 (2000)
- [SW02] F. Soucaliuc, W. Werner: A note on reflecting Brownian motion. *Electron. Commun. Probab.*, **7**: 117–122 (2002)
- [TTV11] P. Tarrès, B. Tóth, B. Valkó: Diffusivity bounds for 1d Brownian polymers. To appear in *Ann. Probab.* (2011)
- [T97] B. Tóth: Limit theorems for weakly reinforced random walks. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **33**: 321–337 (1997)
- [T86] B. Tóth: Persistent random walk in random environment. *Probab. Theory Related Fields* **71**: 615–625 (1986)
- [T95] B. Tóth: The ‘true’ self-avoiding walk with bond repulsion on \mathbb{Z} : limit theorems. *Ann. Probab.*, **23**: 1523–1556 (1995)
- [TV10] B. Tóth, B. Valkó: Superdiffusive bounds on self-repellent Brownian polymers and diffusion in the curl of the Gaussian free field in $d = 2$. [arXiv:1012.5698](https://arxiv.org/abs/1012.5698) (2010)
- [TV11] B. Tóth, B. Vető: Continuous time ‘true’ self-avoiding random walk on Z . *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **8**: 59–75 (2011)
- [TV08] B. Tóth, B. Vető: Self-repelling random walk with directed edges on \mathbb{Z} , *Electron. J. Probab.*, **13**: 1909–1926 (2008)
- [TV07] B. Tóth, B. Vető: Skorohod-reflection of Brownian Paths and BES³, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **73**: 781–788 (2007)
- [TW98] B. Tóth, W. Werner: The true self-repelling motion. *Probab. Theory Related Fields*, **111**: 375–452 (1998)
- [V96] S. R. S. Varadhan: Self-diffusion of a tagged particle in equilibrium of asymmetric mean zero random walks with simple exclusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **31**: 273–285 (1996)
- [V09] B. Vető: The “True” Self-Avoiding Random Walk in \mathbb{Z} , *Wolfram Demonstration Project*, <http://demonstrations.wolfram.com/TheTrueSelfAvoidingRandomWalkInZ/> (2009)
- [W07] J. Warren: Dyson’s Brownian motions, intertwining and interlacing, *Electron. J. Probab.*, **12** 573–590 (2007)