Egydimenziós öntaszító bolyongás irányított élek esetén

Vető Bálint

2007. nov. 22.

(X_n) első szomszéd bolyongás $\mathbb{Z}$-n, $X_0 = 0$.

$$L^{\rightarrow}(i|x_0^n) := \#\{0 \le j < n : x_j = i, x_{j+1} = i+1\},$$
$$L^{\leftarrow}(i|x_0^n) := \#\{0 \le j < n : x_j = i+1, x_{j+1} = i\},$$

ahol $x_0^n = x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_0 = 0$, $|x_i - x_{i-1}| = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

$w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ monoton növekvő, majdnem tetszőleges súlyfüggvény, mindig gondoljunk $w(k) = e^{\beta k}$-ra, ahol $\beta > 0$.

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = X_n + 1 \;\middle|\; X_0^n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_{n+1} = X_n - 1 \;\middle|\; X_0^n\right)$$
$$= \frac{w(-(L^{\rightarrow}(X_n|X_0^n) - L^{\leftarrow}(X_n - 1|X_0^n)))}{w(-(L^{\rightarrow}(X_n|X_0^n) - L^{\leftarrow}(X_n - 1|X_0^n))) + w(-(L^{\leftarrow}(X_n - 1|X_0^n) - L^{\rightarrow}(X_n|X_0^n)))}$$

$$T^{\rightarrow}(i,m) := \mathsf{min}\{n \geq 0 : L^{\rightarrow}(i-1|X_0^n) = m\},$$
$$T^{\leftarrow}(i,m) := \mathsf{min}\{n \geq 0 : L^{\leftarrow}(i|X_0^n) = m\}.$$

$*$ vagy $\rightarrow$ vagy $\leftarrow$

$$S^*_{i,m}(k) := L^{\rightarrow}(k|X_0^{T^*(i,m)}).$$

$$\omega^{*-}_{i,m} = \mathsf{max}\{k < 0 : S^*_{i,m}(k) = 0\},$$
$$\omega^{*+}_{i,m} = \mathsf{min}\{k > i-1 : S^*_{i,m}(k) = 0\}.$$

1. tétel. *Legyen $x, h \in \mathbb{R}^+$ és legyen $*$ vagy $\rightarrow$ vagy $\leftarrow$. Ekkor*

$$\left(\frac{\omega^{*-}_{[Ax],[Ah]}}{A}, \frac{\omega^{*+}_{[Ax],[Ah]}}{A}, \frac{S^{*}_{[Ax],[Ah]}([Ay])}{A} : \frac{\omega^{*-}_{[Ax],[Ah]}}{A} \leq y \leq \frac{\omega^{*+}_{[Ax],[Ah]}}{A}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(-x - 2h, x + 2h, \frac{x}{2} + h - \frac{1}{2}|y| : -x - 2h \leq y \leq x + 2h\right)$$

szuprémumnormában, amint $A \rightarrow \infty$.

1. következmény.

$$\frac{T^{*}([Ax],[Ah])}{A^2} \longrightarrow (x + 2h)^2.$$

$$\gamma_n^{(j)} := \min\left\{k : L^{\rightarrow}(j|X_0^k) + L^{\leftarrow}(j-1|X_0^k) \geq n\right\}.$$

Ezzel

$$\xi_n^{(j)} := L^{\leftarrow}(j-1 \mid X_0^{\gamma_n^{(j)}}) - L^{\rightarrow}(j \mid X_0^{\gamma_n^{(j)}}) \qquad \text{ha} \quad j \leq i$$
$$\xi_n^{(j)} := L^{\rightarrow}(j \mid X_0^{\gamma_n^{(j)}}) - L^{\leftarrow}(j-1 \mid X_0^{\gamma_n^{(j)}}) \qquad \text{ha} \quad j \geq i+1.$$

$(\xi_n^{(j)})_n$ Markov-lánc, különböző j-kre függetlenek, átmenetvalószínűségei:

$$p(x) = \mathbb{P}\left(\xi_{n+1}^{(j)} = x+1 \mid \xi_n^{(j)} = x\right) = \frac{w(-x)}{w(x)+w(-x)},$$
$$q(x) = \mathbb{P}\left(\xi_{n+1}^{(j)} = x-1 \mid \xi_n^{(j)} = x\right) = \frac{w(x)}{w(x)+w(-x)}.$$

$$\tau_0^{(j)} = 0; \qquad \tau_{k+1}^{(j)} = \min\left\{ l > \tau_k^{(j)} : \xi_l^{(j)} = \xi_{l-1}^{(j)} - 1 \right\},$$

$$\eta_n^{(j)} = \xi_{\tau_n^{(j)}}^{(j)}$$

szintén Markov-lánc, különböző j-kre független, és az átmenetvalószínűségek:

$$P(x,y) := \mathbb{P}\left(\eta_{n+1}^{(j)} = y \,\middle|\, \eta_n^{(j)} = x\right) = \begin{cases} \prod_{z=x}^{y} p(z)q(y+1) & \text{if} \quad y \geq x-1 \\ 0 & \text{if} \quad y < x-1 \end{cases}$$

$$S^{\rightarrow}_{i,m}(i-1) = L^{\rightarrow}(i-1|X_0^{T^{\rightarrow}(i,m)}) = m$$

$$S^{\rightarrow}_{i,m}(i-2) = L^{\rightarrow}(i-2|X_0^{T^{\rightarrow}(i,m)}) = m + \eta_m^{(i-1)} + 1.$$

Ha $k = 1, 2, \ldots, i-1$, akkor

$$S^{\rightarrow}_{i,m}(k-1) = S^{\rightarrow}_{i,m}(k) + \eta^{(k)}_{S^{\rightarrow}_{i,m}(k)} + 1$$

Továbbá ha $k = 0, -1, -2, \ldots,$ akkor

$$S^{\rightarrow}_{i,m}(k-1) = S^{\rightarrow}_{i,m}(k) + \eta^{(k)}_{S^{\rightarrow}_{i,m}(k)}$$

Hasonlóan

$$S_{i,m}^{\rightarrow}(i) = m - 1 + \eta_{m-1}^{(i)},$$

és $k > i$ esetén

$$S_{i,m}^{\rightarrow}(k+1) = S_{i,m}^{\rightarrow}(k) + \eta_{S_{i,m}^{\rightarrow}(k)}^{(k+1)}.$$

1. lemma. *Az $\eta^{(j)}$ Markov-láncok egyértelmű stacionárius mértéke*

$$\rho(k) = \frac{\prod_{l=1}^{k} \frac{w(-l)}{w(l)}}{2\sum_{r=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{r} \frac{w(-l)}{w(l)}} \qquad \text{ha } k \geq 0,$$

és $\rho(-k-1) = \rho(k)$ ha $k < 0$.

Léteznek olyan $c_1 < \infty$ és $c_2 > 0$ konstansok, hogy

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} |P^n(0,y) - \rho(y)| < c_1 \exp(-c_2 n).$$

$\sigma^{(j)}$-k ρ eloszlású független valószínűségi változók, ekkor

$$\mathbb{P}\left(\eta_n^{(j)} \neq \sigma^{(j)}\right) < c_1 \exp(-c_2 n).$$

$$\tilde{S}_{i,m}^{\rightarrow}(k) := \begin{cases} m + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\sigma^{(j)} + 1\right) + \sum_{j=k+1}^{0} \sigma^{(j)} & \text{if} \quad k < 0 \\ m + \sum_{j=k+1}^{i-1}\left(\sigma^{(j)} + 1\right) & \text{if} \quad 0 \leq k < i \\ m - 1 + \sum_{j=i}^{k} \sigma^{(j)} & \text{if} \quad k \geq i \end{cases}.$$

2. lemma. *Létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre $b(x) \to 0$ amint $x \to \infty$, és teljesül a*

$$P^n(0, x+1) \leq b(x) P^n(0, x)$$

n-ben egyenletes korlát, ha $x \geq 0$.

Létezik olyan N küszöb, hogy

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} P^n(0, x) x \leq -\frac{1}{4},$$

ha $n \geq N$. Továbbá

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P^n(0, x) x^2 < \infty.$$

Határoloszlás-tétel a bolyongó helyzetére

$$P(n,k) = \mathbb{P}(X_n = k),$$

$$R(s,k) = \left(1 - e^{-s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P(n,k),$$

ahol $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{R}^+$. Ez éppen X_{θ_s} eloszlása, ahol θ_s egy X_n-től független $e^{-s}/(1-e^{-s})$ várható értékű geometriai valószínűségi változó.

$$\pi_A(t,x) = AP([A^2 t],[Ax]),$$

$$\widehat{\pi}_A(s,x) = AR(A^{-2}s,[Ax]),$$

ahol $t, s \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\widehat{\pi}_A(s,x) = \underbrace{A^2\left(1 - e^{-\frac{s}{A^2}}\right)}_{\sim s} \int_0^\infty e^{-st}\pi_A(t,x)\,\mathrm{d}t,$$

vagyis aszimptotikusan π_A Laplace-transzformáltja.

Sejtés:

$$\pi_A(t,x) \longrightarrow \pi(t,x) := \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}\left(-\sqrt{t} \le x \le \sqrt{t}\right).$$

vagyis

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathsf{U}([-1,1]) \qquad \text{amint} \quad t \to \infty.$$

Helyette

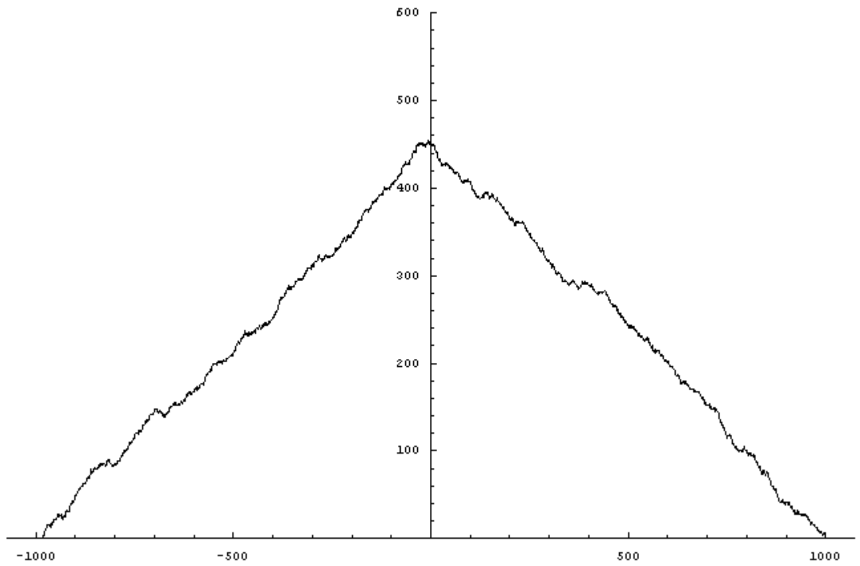
$$\widehat{\pi}(s,x) := s \int_0^\infty e^{-st} \pi(t,x)\,\mathrm{d}t = \sqrt{s\pi}(1 - \Phi(\sqrt{2s}|x|)),$$

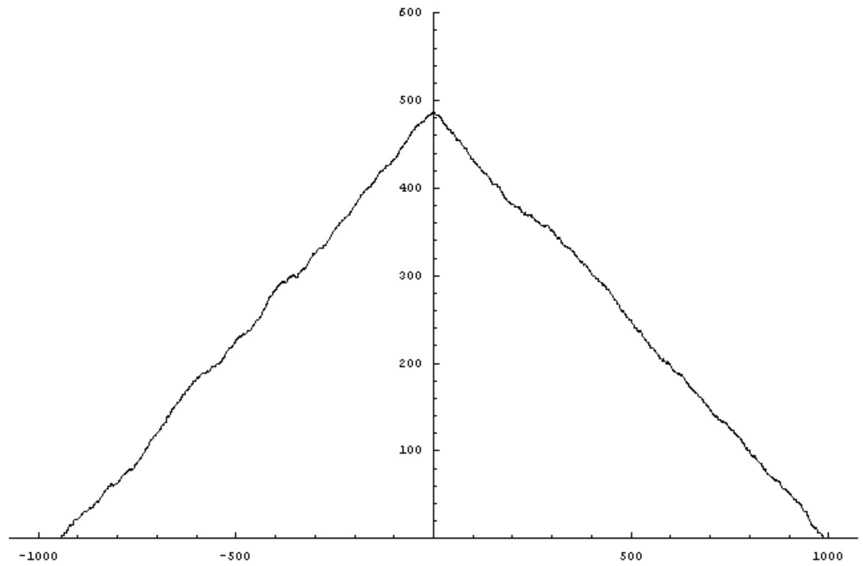
2. tétel. *Legyen $s \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

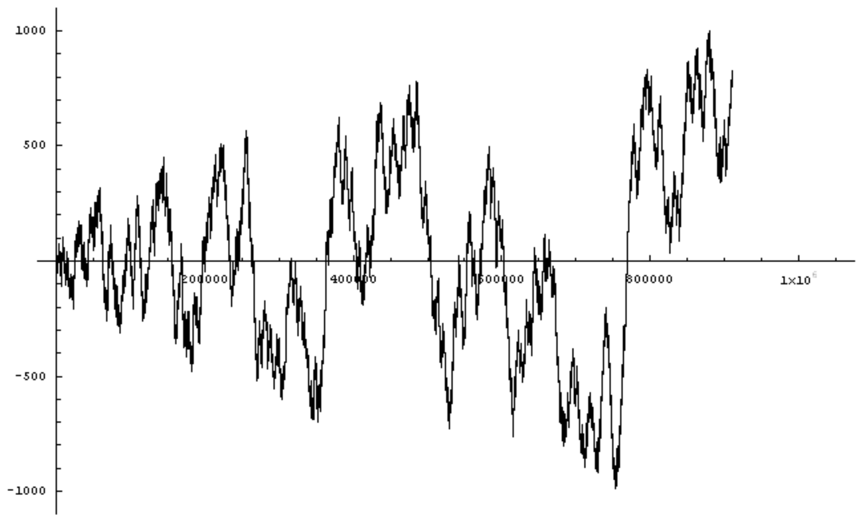
$$\widehat{\pi}_A(s,x) \longrightarrow \widehat{\pi}(s,x)$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, amint $A \to \infty$.

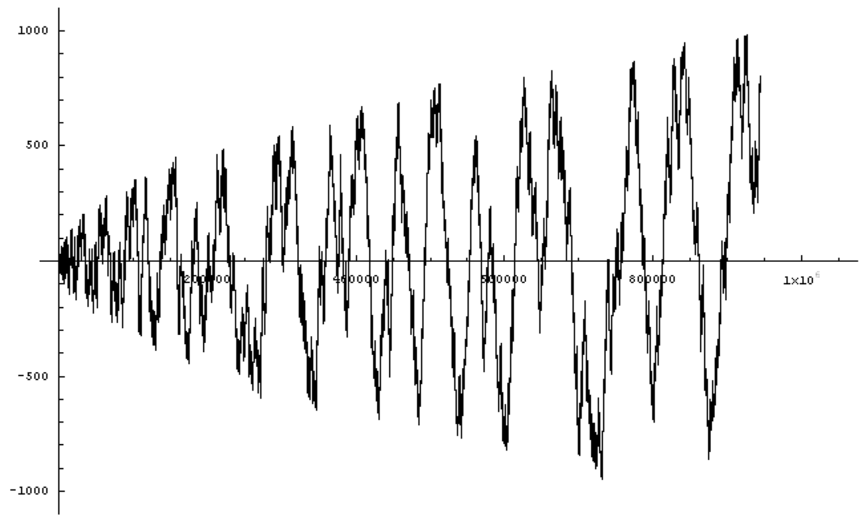
Számítógépes szimulációk







1000
500
-500
-1000
200000
400000
600000
800000
1x10^6



1000
500
-500
-1000
200000
400000
600000
800000
1x10^6