Centrális határeloszlás-tétel öntaszító bolyongásokra II.

Vető Bálint

2008. nov. 21.

Bemutatkozás, publikációk

Vető Bálint
harmadéves doktorandusz (2006 óta)
konzulensem: Tóth Bálint, BME Sztochasztika Tanszék
PhD-témám címe: Hosszú memóriájú bolyongások aszimptotikus viselkedése

Bemutatkozás, publikációk

Vető Bálint
harmadéves doktorandusz (2006 óta)
konzulensem: Tóth Bálint, BME Sztochasztika Tanszék
PhD-témám címe: Hosszú memóriájú bolyongások aszimptotikus viselkedése
Publikációim:

- B. V., The time evolution of permutations under random stirring, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **72** (2006), 891-906
- B. Tóth, B. V., Skorohod-reflection of Brownian Paths and BES^3, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **73** (2007), 781-788
- B. Tóth, B. V., Self-repelling random walk with directed edges on $\mathbb{Z}$, *Electronic Journal of Probability* **13** (2008), 1909-1926
- B. Tóth, B. V., Continuous time "true" self-avoiding random walk on $\mathbb{Z}$, elkészítés alatt

Kutatás

Jelenlegi kutatási téma: Centrális határeloszlás-tétel öntaszító bolyongásokra (2008. jún. óta)
közös munka Horváth Illéssel és Tóth Bálinttal
Korábbi kutatás:
Egydimenziós öntaszító bolyongások (2007–2008)
Variáció az Erdős – Rényi véletlengráf-modellre (2006. szept.–dec.)

Kutatás

Jelenlegi kutatási téma: Centrális határeloszlás-tétel öntaszító bolyongásokra (2008. jún. óta)
közös munka Horváth Illéssel és Tóth Bálinttal
Korábbi kutatás:
Egydimenziós öntaszító bolyongások (2007–2008)
Variáció az Erdős – Rényi véletlengráf-modellre (2006. szept.–dec.)
Konferenciák, iskolák, előadások:

- Erwin Schrödinger Institute (Bécs), junior research fellow a Combinatorics and Statistical Physics programon (2008. febr.–júl.) közben előadás: Models of the "true" self-avioding walk on $\mathbb{Z}$ (2008. márc. és jún.)
- IAS/Park City Mathematics Institute Summer Session in statistical physics, Park City, Utah, USA (2007. júl.)
- EURANDOM Workshop "Random Graphs and Complex Networks", Eindhoven (2007. márc.)

Oktatás

Gyakorlatok:

- matematikusképzés: Feladatmegoldó szeminárium 1. és 2. 2006/07-es tanév óta folyamatosan
- fizikusképzés: Valószínűségszámítás
- építő- és építészmérnök hallgatóknak: Analízis és Valószínűségszámítás 2003 óta
- informatikus hallgatóknak: Számítástudomány és Algoritmuselmélet 2002 óta
- idegen nyelvű képzés: Stochastic processes (2008. villamosmérnök MSc)

Áttekintés

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $d \geq 3$, $X_0 = 0$
Cél: $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$

Áttekintés

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $d \geq 3$, $X_0 = 0$
Cél: $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$
Módszer:

1. $X_t = M_t + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$, ahol M_t stacionárius növekményű L^2-martingál, ezért $\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$.
   η_t: környezet X_t-ből nézve, nem reverzibilis Markov-folyamat az $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ állapottéren

Áttekintés

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $d \geq 3$, $X_0 = 0$
Cél: $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$
Módszer:

1. $X_t = M_t + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$, ahol M_t stacionárius növekményű L^2-martingál, ezért $\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$.
   η_t: környezet X_t-ből nézve, nem reverzibilis Markov-folyamat az $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ állapottéren

2. $$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) \leq 2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\xi_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)$$
   ahol ξ_t reverzibilis Markov-folyamat ugyanazon az Ω állapottéren.

Áttekintés

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $d \geq 3$, $X_0 = 0$
Cél: $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$
Módszer:

1. $X_t = M_t + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$, ahol M_t stacionárius növekményű L^2-martingál, ezért $\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$.
   η_t: környezet X_t-ből nézve, nem reverzibilis Markov-folyamat az $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ állapottéren
2. $$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) \leq 2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\xi_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)$$
   ahol ξ_t reverzibilis Markov-folyamat ugyanazon az Ω állapottéren.
3. Reverzibilitás és az idő megfordításából adódó szimmetria segítségével felső korlát $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\xi_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)$-re.

Bevezetés

Ω állapottér, π stacionárius mértéke a G generátornak
η_t legyen G generátorú stacionárius Markov-folyamat
Legyen G^* a G adjungáltja, továbbá

$$S := \frac{G + G^*}{2}$$

a szimmetrizált, mely negatív operátor.

Bevezetés

Ω állapottér, π stacionárius mértéke a G generátornak
η_t legyen G generátorú stacionárius Markov-folyamat
Legyen G^* a G adjungáltja, továbbá

$$S := \frac{G + G^*}{2}$$

a szimmetrizált, mely negatív operátor.
Tekintsük az $L^2(\Omega, \pi)$ valós Hilbert-térből a 0 várható értékű függvényeket: $\mathcal{H}_0 := \{\varphi \in L^2(\Omega, \pi) : \int \varphi \, \mathrm{d}\pi = 0\}$. Ezen a téren a

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \psi \mathrm{d}\pi$$

a szokásos skalárszorzat, melyből a $\|\varphi\|_0 = \left(\int_\Omega \varphi^2 \mathrm{d}\pi\right)^{1/2}$ norma származik.

Soboljev-terek

Tekintsük a $\varphi \in \mathrm{Dom}((-S)^{1/2})$, és legyen

$$\|\varphi\|_+^2 := \|(-S)^{1/2}\varphi\|_0^2.$$

A $\mathrm{Dom}((-S)^{1/2})$ halmaz lezártja a $\|.\|_+$ norma topológiájában legyen $\mathcal{H}_+$.

Soboljev-terek

Tekintsük a $\varphi \in \mathrm{Dom}((-S)^{1/2})$, és legyen

$$\|\varphi\|_+^2 := \|(-S)^{1/2}\varphi\|_0^2.$$

A $\mathrm{Dom}((-S)^{1/2})$ halmaz lezártja a $\|.\|_+$ norma topológiájában legyen $\mathcal{H}_+$.
Hasonlóan

$$\|\varphi\|_-^2 := \|(-S)^{-1/2}\varphi\|_0^2,$$

ha ez véges, és $\mathcal{H}_-$ a $\mathrm{Ran}((-S)^{1/2})$ lezártja a $\|.\|_-$ norma topológiájában.

Dominancia reverzibilis Markov-folyamattal

Tétel (S. Sethuraman, S. R. S. Varadhan, H.-T. Yau)

Ha $\varphi \in \mathcal{H}_0$, η_t *pedig* G *generátorú stacionárius Markov-folyamat, továbbá*

$$\overline{\sigma}^2(\varphi) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \varphi(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right).$$

Ekkor

$$\overline{\sigma}^2(\varphi) \le 2\|\varphi\|_-^2.$$

Dominancia reverzibilis Markov-folyamattal

Tétel (S. Sethuraman, S. R. S. Varadhan, H.-T. Yau)

Ha $\varphi \in \mathcal{H}_0$, η_t *pedig* G *generátorú stacionárius Markov-folyamat, továbbá*

$$\overline{\sigma}^2(\varphi) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \varphi(\eta_u)\,\mathrm{d}u \right)^2 \right).$$

Ekkor

$$\overline{\sigma}^2(\varphi) \le 2\|\varphi\|_-^2.$$

$$\|\varphi\|_-^2 = \langle (-S)^{-1/2}\varphi, (-S)^{-1/2}\varphi \rangle = \int_0^\infty \langle \varphi, e^{uS}\varphi \rangle\,\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{t-u}{t} \varphi(\xi_0)\varphi(\xi_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \varphi(\xi_u)\,\mathrm{d}u \right)^2 \right),$$

ahol ξ_t az S generátorú folyamat.

Bizonyítás I.

Pozitív λ-k esetén a
$$\lambda\psi_\lambda - S\psi_\lambda = \varphi$$
egyenlet megoldására, vagyis $\psi_\lambda = (\lambda I - S)^{-1}\varphi$-re
$$\lambda\psi_\lambda = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda u} e^{uS}\varphi\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-v}\left(e^{\frac{v}{\lambda}S}\varphi\right)\mathrm{d}v \to 0$$
L^2-ben amint $\lambda \to 0$ a monoton konvergenciatétel miatt, hiszen $e^{\frac{v}{\lambda}S}\varphi \to 0$ pontonként. Ezért
$$\lim_{\lambda\to 0}\|\varphi - (-S)\psi_\lambda\|_0 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\|\psi_\lambda\|_0 = 0.$$

Bizonyítás II.

$$\psi_\lambda(\eta_t) - \psi_\lambda(\eta_s) - \int_s^t G\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = M_\lambda(t) - M_\lambda(s)$$

martingál az $\mathcal{F}_{(-\infty,t]} = \sigma(\{\eta_u : u \leq t\})$ filtrációra.

Bizonyítás II.

$$\psi_\lambda(\eta_t) - \psi_\lambda(\eta_s) - \int_s^t G\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = M_\lambda(t) - M_\lambda(s)$$

martingál az $\mathcal{F}_{(-\infty,t]} = \sigma(\{\eta_u : u \leq t\})$ filtrációra.

$$\psi_\lambda(\eta_s) - \psi_\lambda(\eta_t) - \int_s^t G^*\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t)$$

fordított martingál az $\mathcal{F}_{[s,\infty)} = \sigma(\{\eta_u : u \geq s\})$ filtrációra.

Bizonyítás II.

$$\psi_\lambda(\eta_t) - \psi_\lambda(\eta_s) - \int_s^t G\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = M_\lambda(t) - M_\lambda(s)$$

martingál az $\mathcal{F}_{(-\infty,t]} = \sigma(\{\eta_u : u \le t\})$ filtrációra.

$$\psi_\lambda(\eta_s) - \psi_\lambda(\eta_t) - \int_s^t G^*\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t)$$

fordított martingál az $\mathcal{F}_{[s,\infty)} = \sigma(\{\eta_u : u \ge s\})$ filtrációra.
A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$-\int_s^t S\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(M_\lambda(t) - M_\lambda(s) + M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t)).$$

Bizonyítás vége

$$-\int_s^t S\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(M_\lambda(t) - M_\lambda(s) + M_\lambda^*(s) - M_\lambda^*(t))$$

Bizonyítás vége

$$-\int_s^t S\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(M_\lambda(t) - M_\lambda(s) + M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t))$$

miatt

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t (-S)\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{4}\cdot 2\left(\mathbb{E}\left((M_\lambda(t) - M_\lambda(s))^2\right) + \mathbb{E}\left((M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t))^2\right)\right).$$

Bizonyítás vége

$$-\int_s^t S\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(M_\lambda(t) - M_\lambda(s) + M_\lambda^*(s) - M_\lambda^*(t))$$

miatt

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t (-S)\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{4}\cdot 2\left(\mathbb{E}\left((M_\lambda(t) - M_\lambda(s))^2\right) + \mathbb{E}\left((M_\lambda^*(s) - M_\lambda^*(t))^2\right)\right).$$

Bal oldal határértéke amint $\lambda \to 0$:
$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t \varphi(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) = (t-s)\overline{\sigma}^2(\varphi) + o(t-s)$.

Bizonyítás vége

$$-\int_s^t S\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(M_\lambda(t) - M_\lambda(s) + M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t))$$

miatt

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t (-S)\psi_\lambda(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) \leq \frac{1}{4}\cdot 2\left(\mathbb{E}\left((M_\lambda(t) - M_\lambda(s))^2\right) + \mathbb{E}\left((M^*_\lambda(s) - M^*_\lambda(t))^2\right)\right).$$

Bal oldal határértéke amint $\lambda \to 0$:
$\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t \varphi(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) = (t-s)\overline{\sigma}^2(\varphi) + o(t-s)$.
Jobb oldalon:

$$\mathbb{E}\left((M_\lambda(t) - M_\lambda(s))^2\right) = \mathbb{E}\left((M^*_\lambda(t) - M^*_\lambda(s))^2\right)$$

$$= 2(t-s)\langle\psi_\lambda, -G\psi_\lambda\rangle = 2(t-s)\langle\psi_\lambda, -S\psi_\lambda\rangle \to 2(t-s)\|\varphi\|_-^2.$$

Tétel alkalmazása öntaszító bolyongásra

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $X_0 = 0$ ($d \geq 3$)
η_t: környezet X_t-ből nézve (állapottér $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$)

$$G = \frac{\partial}{\partial \omega_0} + \sum_{k=1}^{d} w(\omega_0 - \omega_{e_k})(T_k - I) + w(\omega_0 - \omega_{-e_k})(T_k^* - I)$$

ahol T_k a környezetet e_k-val eltoló operátor
$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, $a > 0$-val $w(x) = x_+ + a$.

Tétel alkalmazása öntaszító bolyongásra

X_t: öntaszító bolyongás $\mathbb{Z}^d$-n, $X_0 = 0$ $(d \geq 3)$
η_t: környezet X_t-ből nézve (állapottér $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$)

$$G = \frac{\partial}{\partial \omega_0} + \sum_{k=1}^{d} w(\omega_0 - \omega_{e_k})(T_k - I) + w(\omega_0 - \omega_{-e_k})(T_k^* - I)$$

ahol T_k a környezetet e_k-val eltoló operátor
$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, $a > 0$-val $w(x) = x_+ + a$.
Az $M_t = X_t - \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$ folyamatot a

$$\begin{aligned}
V_k(\underline{\omega}) &= (\omega_0 - \omega_{e_k})_+ + a - (\omega_0 - \omega_{-e_k})_+ - a \\
&= \frac{1}{2}\left(|\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}|\right) + \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_{e_k}) - \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_{-e_k}) \\
&= \frac{1}{2} g_k(\underline{\omega}) + \frac{1}{2} h_k(\underline{\omega}) - \frac{1}{2} j_k(\underline{\omega})
\end{aligned}$$

függvény teszi martingállá.

Felső becslés a szórásnégyzetre

Célunk a

$$X_t = \underbrace{X_t - \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u}_{M_t} + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$$

felírás alapján belátni, hogy $\mathbb{E}(X_t^2) \leq ct$ valamilyen $c < \infty$-re.
$\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$, mert M_t stacionárius növekményű martingál.
A Sethuraman – Varadhan – Yau-tétel miatt elég $\|V\|_- < \infty$.

Felső becslés a szórásnégyzetre

Célunk a

$$X_t = \underbrace{X_t - \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u}_{M_t} + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$$

felírás alapján belátni, hogy $\mathbb{E}(X_t^2) \le ct$ valamilyen $c < \infty$-re.
$\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$, mert M_t stacionárius növekményű martingál.
A Sethuraman – Varadhan – Yau-tétel miatt elég $\|V\|_- < \infty$.

$$S = \frac{G + G^*}{2} = \sum_{k=1}^{d} r(\omega_0 - \omega_{e_k})(T_k - I) + r(\omega_0 - \omega_{-e_k})(T_k^* - I)$$

a ξ_t reverzibilis ugró folyamat generátora, amely egy bolyongás véletlen közegben ($r(x) = w(x) + w(-x) = |x| + 2a$).

Felső becslés a szórásnégyzetre

Célunk a

$$X_t = \underbrace{X_t - \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u}_{M_t} + \int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u$$

felírás alapján belátni, hogy $\mathbb{E}(X_t^2) \le ct$ valamilyen $c < \infty$-re.
$\mathbb{E}(M_t^2) = c_1 t$, mert M_t stacionárius növekményű martingál.
A Sethuraman – Varadhan – Yau-tétel miatt elég $\|V\|_- < \infty$.

$$S = \frac{G + G^*}{2} = \sum_{k=1}^{d} r(\omega_0 - \omega_{e_k})(T_k - I) + r(\omega_0 - \omega_{-e_k})(T_k^* - I)$$

a ξ_t reverzibilis ugró folyamat generátora, amely egy bolyongás véletlen közegben ($r(x) = w(x) + w(-x) = |x| + 2a$).
Legyen $\mathcal{R}$ az átmenetmagfüggvény, amely

$$\mathcal{R}(\underline{\omega}, \tau_{e_k}\underline{\omega}) = r(\omega_0 - \omega_{e_k})$$
$$\mathcal{R}(\underline{\omega}, \tau_{-e_k}\underline{\omega}) = r(\omega_0 - \omega_{-e_k}).$$

Reverzibilitás felhasználása

Legyen $A : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ antiszimmetrikus függvény
$A(x,y) = -A(y,x)$ valamilyen technikai végességi feltétellel.
A ξ_t folyamat ugrásaiból képezzük az
$Y_t = \sum_{s\in[0,t]:\xi_{s-}\neq\xi_{s+}} A(\xi_{s-},\xi_{s+})$ folyamatot és az

$$f(\underline{\omega}) = \int_\Omega A(\underline{\omega},\underline{\tilde{\omega}})\mathcal{R}(\underline{\omega},\mathrm{d}\underline{\tilde{\omega}}) = \sum_{|e|=1} A(\underline{\omega},\tau_e\underline{\omega})r(\omega_0-\omega_e)$$

0 várható értékű függvényt, mellyel

$$N_t = Y_t - \int_0^t f(\xi_u)\,\mathrm{d}u$$

stacionárius növekményű martingál. Ezért $\mathbb{E}(N_t^2) = c_2 t$.

Az idő megfordítása

$$\mathcal{Y}(\xi_{[0,t]}) = Y_t$$
$$\mathcal{Z}(\xi_{[0,t]}) = \int_0^t f(\xi_u)\,\mathrm{d}u$$

Az időt megfordítva világos, hogy

$$\mathcal{Y}(\hat{\xi}_{[0,t]}) = -\mathcal{Y}(\xi_{[0,t]})$$
$$\mathcal{Z}(\hat{\xi}_{[0,t]}) = \mathcal{Z}(\xi_{[0,t]})$$

ahol $\hat{\xi}_u = \xi_{t-u}$.

Az idő megfordítása

$$\mathcal{Y}(\xi_{[0,t]}) = Y_t$$

$$\mathcal{Z}(\xi_{[0,t]}) = \int_0^t f(\xi_u)\,\mathrm{d}u$$

Az időt megfordítva világos, hogy

$$\mathcal{Y}(\hat{\xi}_{[0,t]}) = -\mathcal{Y}(\xi_{[0,t]})$$

$$\mathcal{Z}(\hat{\xi}_{[0,t]}) = \mathcal{Z}(\xi_{[0,t]})$$

ahol $\hat{\xi}_u = \xi_{t-u}$. Ezért az

$$N_t = Y_t - \int_0^t f(\xi_u)\,\mathrm{d}u$$

felírásban a jobb oldal két tagja korrelálatlan, vagyis

$$\mathbb{E}(N_t^2) = \mathbb{E}(Y_t^2) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t f(\xi_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right).$$

Alkalmazás az öntaszító bolyongásra

A diffuzív felső korláthoz elég belátni, hogy a

$$\begin{aligned} g_k(\underline{\omega}) &= |\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}| \\ h_k(\underline{\omega}) &= \omega_0 - \omega_{e_k} \\ j_k(\underline{\omega}) &= \omega_0 - \omega_{-e_k} \end{aligned}$$

függvények előállnak $\sum_{|e|=1} A(\underline{\omega}, \tau_e\underline{\omega}) r(\omega_0 - \omega_e)$ alakban alkalmas antiszimmetrikus A-val.

Alkalmazás az öntaszító bolyongásra

A diffuzív felső korláthoz elég belátni, hogy a

$$\begin{aligned} g_k(\underline{\omega}) &= |\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}| \\ h_k(\underline{\omega}) &= \omega_0 - \omega_{e_k} \\ j_k(\underline{\omega}) &= \omega_0 - \omega_{-e_k} \end{aligned}$$

függvények előállnak $\sum_{|e|=1} A(\underline{\omega}, \tau_e \underline{\omega}) r(\omega_0 - \omega_e)$ alakban alkalmas antiszimmetrikus A-val.

$$A_g(\underline{\omega}, \underline{\tilde{\omega}}) = \begin{cases} +1 & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{e_k} \underline{\omega} \\ -1 & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{-e_k} \underline{\omega} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{\omega}) &= |\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}| \\ &= g_k(\underline{\omega}) \end{aligned}$$

Alkalmazás az öntaszító bolyongásra

A diffuzív felső korláthoz elég belátni, hogy a

$$g_k(\underline{\omega}) = |\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}|$$
$$h_k(\underline{\omega}) = \omega_0 - \omega_{e_k}$$
$$j_k(\underline{\omega}) = \omega_0 - \omega_{-e_k}$$

függvények előállnak $\sum_{|e|=1} A(\underline{\omega}, \tau_e \underline{\omega}) r(\omega_0 - \omega_e)$ alakban alkalmas antiszimmetrikus A-val.

$$A_g(\underline{\omega}, \underline{\tilde{\omega}}) = \begin{cases} +1 & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{e_k}\underline{\omega} \\ -1 & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{-e_k}\underline{\omega} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \begin{aligned} f(\underline{\omega}) &= |\omega_0 - \omega_{e_k}| - |\omega_0 - \omega_{-e_k}| \\ &= g_k(\underline{\omega}) \end{aligned}$$

$$A_h(\underline{\omega}, \underline{\tilde{\omega}}) = \begin{cases} \frac{-\omega_{e_k}}{r(\omega_0 - \omega_{e_k})} & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{e_k}\underline{\omega} \\ \frac{\omega_0}{r(\omega_0 - \omega_{-e_k})} & \text{ha } \underline{\tilde{\omega}} = \tau_{-e_k}\underline{\omega} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad f(\underline{\omega}) = \omega_0 - \omega_{e_k} = h_k(\underline{\omega})$$

Összefoglalás

$$\|V\|_-^2 = \|g+h+j\|_-^2 \le 3\left(\|g\|_-^2 + \|h\|_-^2 + \|j\|_-^2\right) = c_2.$$

Sethuraman – Varadhan – Yau tétele miatt

$$\overline{\sigma}^2(V) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t V(\eta_u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right) \le 2\|V\|_-^2 = 2c_2.$$

Összegezve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(X_t^2) \le 2\left(\frac{1}{t}\mathbb{E}(M_t^2) + \overline{\sigma}^2(V)\right) \le 2c_1 + 4c_2.$$

Vége

Köszönöm a figyelmet!