Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Sztochasztika Tanszék

Elefánt bolyongás általános lépés-eloszlással

TDK dolgozat

Szerző: Kiss József
Témavezető: Dr. Vető Bálint, Sztochasztika Tanszék

Budapest, 2020

Contents

1

Bevezetés

Ebben a dolgozatban egy elefánt bolyongás(EB) nevű bolyongással fogok foglalkozni. Ez egy memóriával rendelkező bolyongás, azaz minden lépés függ a megelőző lépésektől, innen ered az elefánt bolyongás elnevezés. Többféle változata létezik a memóriával rendelkező bolyongásoknak, például emlékezés az első lépésre, emlékezés a legutolsó lépésre. A mi konkrét modellünkben a bolyongónak teljes memóriája van, azaz minden megelőző lépésre emlékszik.

Bercu [] 2017-es cikkében szereplő modellben az első lépést követően - ami vagy +1 vagy -1 - minden lépésben egyenletesen választ egyet a megelőző lépések közül, majd ezt +1-gyel, vagy -1-gyel szorozva adja meg az aktuális lépést. A dolgozatban szereplő modell ehhez képest általánosabb, megadunk egy korlátos, de egyébként általános lépéseloszlást, aminek a segítségével definiáljuk a bolyongást.

Célunk az EB vizsgálata az α memória-paraméter különböző tartományaiban. A diffuzív tartományában, ahol $0 \leq \alpha < 1/2$, illetve a kritikus tartományában, ahol $\alpha = 1/2$ az EB majdnem mindenütt aszimptotikus viselkedését és határeloszlását, továbbá a szuperdiffuzív tartományban, ahol $1/2 < \alpha \leq 1$ az EB határeloszlását fogjuk vizsgálni martingálos megközelítéssel.

A dolgozat felépítése a következő. A második fejezetben bevezetjük az EB modellünket, illetve a bolyongáson végrehajtunk egy szükséges transzformációt, majd felépítjük ebből a bolyongás tárgyalásához szükséges martingált. A harmadik fejezetben rátérünk bizonyítás nélkül a dolgozat eredményeire, majd a negyedik fejezetben bemutatjuk a dolgozat alapjául szolgáló Bercu cikkben szereplő modellt és eredményeket. Az ötödik fejezetben rátérünk a martingál módszer bemutatására, ahol is kiderül, hogy a majdnem mindenütt konvergencia (diffuziv- és kritikus tartomány) és a határeloszlás tétel (szuperdiffuziv tartomány) bizonyítása megegyezik Bercu cikkében tárgyalt hasonló tételek bizonyításával, így ezeket nem közöljük. Ezekben a bizonyításokban martingálokra vonatkozó nagy számok erős törvénye és centrális határeloszlás tétel foglal központi szerepet, így egy ezekre vonatkozó feltételt kell ellenőriznünk a konstruált martingálunkra. A hatodik fejezet pedig bizonyításoknak ad helyet, itt fogjuk megadni a szuperdiffuziv tartománybeli határeloszlás első két momentumának számolását.

2

Elefánt bolyongás általános lépés-eloszlással

Az egy-dimenziós EB-t általános lépés-eloszlással a következő módon definiáljuk. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ független azonos eloszlású, korlátos valószínűségi változók egy sorozata, azaz $\mathbb{P}(-K \leq \xi_k \leq K) = 1$ $(k = 0, 1, \dots)$ valamely $K > 0$ számra, továbbá jelölje X_n az elefánt n-edik időpontban megtett lépését. Az elefánt $n = 0$ időpontban az origóból indul, az első lépése pedig legyen $X_1 = \xi_1$, ezután minden további lépést a következő módon adunk meg

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_k & \alpha \text{ valószínűséggel,} \\ \xi_{n+1} & 1 - \alpha \text{ valószínűséggel,} \end{cases}$$

ahol k index egyenletes eloszlású az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon, $\alpha \in [0, 1]$ a bolyongás memória-paramétere. Vegyük észre, hogy a megadott $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók nem függetlenek. Az elefánt helyét a következő módon adhatjuk meg

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}. \tag{2.1}$$

Hogy alkalmazni tudjuk a martingál-módszert a bolyongásra elvégezzük a következő átalakításokat. Jelölje m_k a fentebb bevezetett $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók k-adik momentumát, azaz

$$\mathbb{E}(\xi_1^k) = m_k,$$

továbba bevezetjük a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n &= X_n - m_1 \\ \tilde{S}_n &= \sum_{k=0}^{n} \tilde{X}_n = \tilde{S}_{n-1} + \tilde{X}_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Legyen $(\mathcal{F}_n)$ σ-algábrák növekvő sorozata, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Ekkor minden $n \leq 1$ esetén a következőket kapjuk

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \alpha \frac{\tilde{S}_n}{n} \qquad \text{m.b.} \tag{2.3}$$

ami (2.2)-gyel együtt adja, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \gamma_n \tilde{S}_n \qquad \text{ahol} \qquad \gamma_n = 1 + \frac{\alpha}{n}. \tag{2.4}$$

Továbbá,

$$\prod_{k=1}^{n} \gamma_k = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

ahol Γ jelöli az Euler-féle gamma függvényt. Ekkor legyen $(\tilde{M}_n)$ valószínűségi változóknak egy sorozata, ami $n \geq 0$ esetén $\tilde{M}_n = a_n \tilde{S}_n$, ahol $a_1 = 1$, és minden $n \geq 2$ esetén

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}. \tag{2.5}$$

Mivel $a_n = \gamma_n a_{n+1}$, ezért (2.4)-ből kapjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$\mathbb{E}(\tilde{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n \qquad \text{m.b.}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $(\tilde{M}_n)$ sorozat egy martingál.

Összefoglalva, ebben a fejezetben tehát bevezettük az (a_n) számsorozatot, illetve ennek segítségével az $(\tilde{M}_n)$ martingált. Ez a martingál nem szükséges a következő fejezetben szereplő tételek kimondásához, viszont egy fontos technikai részlet, ugyanis az ötödik fejezetben kiderül, hogy ez a megfelelő martingál, aminek a kvadratikus variációja felülről korlátozható, így alkalmazhatóak a martingálokra vonatkozó nagy számok erős törvénye és centrális határ-eloszlás tétele. Az ötödik fejezetben még vissza fogunk térni az (a_n) sorozat aszimptotikus viselkedésére, ugyanis annak fontos szerepe lesz a martingál kvadratikus variációjának becslésében.

3

A dolgozat eredményei

3.1 A diffuzív tartomány

A következő tételek az $0 \leq \alpha < 1/2$ tartományban igazak az elefánt bolyongásra.

Tétel 3.1. *Teljesül a nagy számok erős törvénye*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m_1 \qquad m.b. \tag{3.1}$$

Tétel 3.2. *Teljesül a következő gyenge konvergencia*

$$\frac{S_n - nm_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-2\alpha}\right). \tag{3.2}$$

3.2 A kritikus tartomány

A következőkben a kritikus tartománnyal foglalkozunk, ahol a memóriaparaméter $\alpha = 1/2$.

Tétel 3.3. *Teljesül a következő gyenge konvergencia*

$$\frac{S_n - nm_1}{\sqrt{n\log(n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \tag{3.3}$$

3.3 A szuperdiffuzív tartomány

Végezetül a szuperdiffuzív tartománnyal foglalkozunk, amikor $1/2 < \alpha \leq 1$.

Tétel 3.4. *Fennáll a következő majdnem mindenütt konvergencia*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - nm_1}{n^\alpha} = L \qquad m.b. \tag{3.4}$$

ahol L egy nemdegenerált valószínűségi változó. Továbbá az előbbi konvergencia $\mathbb{L}^4$-ben is teljesül, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n - nm_1}{n^\alpha} - L\right|^4\right) = 0. \tag{3.5}$$

Tétel 3.5. *A fenti tételben szereplő L első két momentuma*

$$\mathbb{E}(L) = 0, \tag{3.6}$$

$$\mathbb{E}(L^2) = \frac{2\alpha m_2 - m_1^2}{(2\alpha - 1)\Gamma(2\alpha + 1)}. \tag{3.7}$$

4

Ismeretek az elefánt bolyongás alapmodeljéről

Bercu által vizsgált alapmodellben az origóból indulva a következő módon van definiálva az elefánt bolyongás, $q \in [0,1]$ valószínűséggel $X_1 = +1$, illetve $1-q$ valószínűséggel $X_1 = -1$, minden további $n \geq 1$ esetén

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & p \text{ valószínűséggel,} \\ -X_k & 1-p \text{ valószínűséggel,} \end{cases}$$

ahol $p \in [0,1]$ a bolyongás memória-paramétere, és k egyenletes eloszlású az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmazon.

Mielőtt rátérünk az eredmények bemutatására, bevezetjük az $\alpha = 2p-1$ jelölést.

4.1 A diffuzív tartomány

A következő tételek az $0 \leq \alpha < 1/2$ tartományban igazak a Bercu által definiált elefánt bolyongásra.

Tétel 4.1. *Teljesül a nagy számok erős törvénye*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \qquad m.b.$$

Tétel 4.2. *Teljesül a következő gyenge konvergencia*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-2\alpha}\right).$$

4.2 A kritikus tartomány

A kritikus tartományban a memória-paraméter $\alpha = 1/2$.

Tétel 4.3. *Teljesül a következő gyenge konvergencia*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log(n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

4.3 A szuperdiffuzív tartomány

A szuperdiffuzív tartományban $1/2 < \alpha \leq 1$.

Tétel 4.4. *Fennáll a következő majdnem mindenütt konvergencia*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^\alpha} = L \qquad m.b.$$

ahol L egy nemdegenerált valószínűségi változó. Továbbá az előbbi konvergencia $\mathbb{L}^4$-ben is teljesül, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - L\right|^4\right) = 0.$$

Tétel 4.5. *A fenti tételben szereplő L első két momentuma*

$$\mathbb{E}(L) = \frac{2q-1}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$\mathbb{E}(L^2) = \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha)}.$$

5

A martingál módszer

Ahogy a második fejezetben már említettük, most visszatérünk az (2) formulával definiált (a_n) sorozat tárgyalására. Látni fogjuk, hogy (a_n) szoros kapcsolatban áll az $(\tilde{M}_n)$ aszimptotikus viselkedésével és kvadratikus variációjával is, ez utóbbi kettő pedig a martingálokra vonatkozó nagy számok erős törvénye és centrális határeloszlás tétele szempontjából fontos.

Először is az (a_n) segítségével additív alakba írjuk az $\tilde{M}_n$ martingált, majd ennek az a segítségével bizonyosodunk meg a fent említettekről, ehhez definiáljuk a martingál kvadratikus variációját is.

A dolgozat egyik eredménye, hogy kiderült, hogy a második fejezetben felsorolt konvergenciára vonatkozó tételek bizonyításai, a Tétel 3.5 kivételével, megegyeznek a Bercu cikkében bemutatott, martingál módszeren alapuló bizonyításokkal, feltéve, hogy az általunk bevezetett általános lépés-eloszlás korlátos. A martingál módszeren alapuló bizonyításnak a kulcslépése a martingál növekményének második- és negyedik hatványának feltételes várható értékére vonatkozó egyenletes korlát meglététének az ellenőrzése. Amint megbizonyosodtunk az egyenletes korlát létezéséről, az említett bizonyításokat nem kell elvégeznünk, ugyanis azt Bercu már megtette. További eredménye a dolgozatnak, hogy a Tétel (3.5)-ban szereplő $\tilde{L}$ nemdegenerált valószínűségi változó első két momentumát kiszámoltuk. A következőkben a martingál növekményének második- és negyedik hatványának feltételes várható értékére vonatkozó egyenletes korlátok létezését ellenőrizzük.

Korábban láttuk már, hogy az $(\tilde{M}_n)$ sorozat egy martingál, ahol

$$\tilde{M}_n = a_n \tilde{S}_n \qquad n \geq 0.$$

Továbbá azt is láttuk, hogy $\xi_1, \xi_2 \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók korlátossága miatt az

$$X_1 = \xi_1$$
$$X_{n+1} = \begin{cases} X_k & \alpha \text{ valószínűséggel}, \\ \xi_{n+1} & 1-\alpha \text{ valószínűséggel}, \end{cases} \qquad n \geq 1$$

valószínűségi változók is korlátosak. Következésképpen, azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{S}_n| \leq n(K - m_1),$$

ahol K jelölte a ξ_k valószínűségi változók egyenletes korlátját, amiből adódik, hogy az $(\tilde{M}_n)$ négyzetesen integrálható.
Az $(\tilde{M}_n)$ martingál a következő additív alakban is megadható

$$\tilde{M}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\varepsilon}_k, \tag{5.1}$$

ami abból adódik, hogy a martingál $\Delta\tilde{M}_n = \tilde{M}_n - \tilde{M}_{n-1}$ növekményei felírhatóak $\Delta\tilde{M}_n = a_n\tilde{S}_n - a_{n-1}\tilde{S}_{n-1} = a_n\tilde{\varepsilon}_n$ alakban, ahol

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{S}_n - \gamma_{n-1}\tilde{S}_{n-1}. \tag{5.2}$$

Az $(\tilde{M}_n)$ martingálhoz tartozó kvadratikus variáció a következő

$$\langle\tilde{M}\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}). \tag{5.3}$$

A (2.2) és (2.3) formulákból egyből kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$. Az (5.2) és (2.3) formulákból pedig adódik, hogy

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{X}_n - \mathbb{E}(\tilde{X}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon_n \tag{5.4}$$

ahol $\varepsilon_n = S_n - \gamma_{n-1}S_{n-1}$.

Ekkor (5.4)-ból következik, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)^2|\mathcal{F}_n) \\
&= \alpha\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + (1-\alpha)m_2 - \left(\alpha\frac{S_n}{n} + (1-\alpha)m_1\right)^2, \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

aminek számolásakor azt is felhasználtuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \alpha\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + (1-\alpha)m_2, \\
\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)^2
\end{aligned}
$$

Hasonlóan kapjuk meg azt, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) =& \alpha\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^4 + (1-\alpha)m_4 - \\
& 4\left(\alpha\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^3 + (1-\alpha)m_3\right)\left(\alpha\frac{S_n}{n} + (1-\alpha)m_1\right) + \\
& 6\left(\alpha\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + (1-\alpha)m_2\right)\left(\alpha\frac{S_n}{n} + (1-\alpha)m_1\right)^2 - \\
& 3\left(\alpha\frac{S_n}{n} + (1-\alpha)m_1\right)^4 \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Végül az (5.5) és (5.6) formulákból az alábbi egyenletes korlátokhoz jutunk hozzá

$$
\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \leq m_2 \quad \text{és} \quad \sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) \leq m_4 + 6m_2m_1^2 + m_1^4 \qquad (5.7)
$$

Ezek után az (5.1), (5.3) és (5.7)-ből az következik, hogy

$$
\langle\tilde{M}\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \alpha\zeta_n \quad \text{ahol} \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2\left(\frac{\tilde{S}_k}{k}\right)^2
$$

Látható, hogy az $(\tilde{M}_n)$ martingál aszimptotikus viselkedése a következő kifejezéssel szoros kapcsolatban van

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha)} \right)^2.$$

A v_n aszimptotikus viselkedése ismert [1] alapján. A diffuzív tartományban, ahol $0 \leq \alpha < 1/2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n^{3-4p}} = \frac{(\Gamma(\alpha+1))^2}{1-2\alpha}.$$

A kritikus tartományban, ahol $\alpha = 1/2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\log(n)} = \frac{\pi}{4}.$$

Végül a szuperdiffuzív tartományban, ahol $1/2 < \alpha \leq 1$, a következő véges értékhez konvergál

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \right)^2.$$

Ebben a fejezetben tehát megbizonyosodtunk arról, hogy a megfelelő martingált konstruáltuk meg a második fejezetben, azaz egy olyan martingált, amire alkalmazható a nagy számok erős törvénye és a centrális határeloszlás tétel. Ezek után az EB-ra vonatkozó [1]-ben bemutatott bizonyítások (nagy számok erős törvénye, határeloszlás tétel) alkalmazhatóak a mi modellünkre is, így ezeket nem ismételjük meg.

6

A határelolszlás momentumai a szuperdiffuzív tartományban

A harmadik fejezetben láthattuk, hogy a szuperdiffuzív tartományban megfelelő normalizáció után az EB majdnem biztosan konvergál egy nemdegenerált L valószínűségi változóhoz. Ebben a fejezetben elvégezzük tehát ennek az L valószínűségi változó első kettő momentumának számolását, azaz bebizonyítjuk Tétel 3.5-öt.

A Tétel 3.5 bizonyításában felhasználjuk a következő kettő, gamma függvényre vonatkozó lemmát.

Lemma 6.1. *Ha a és b tetszőleges nemnegatív valós szám, hogy $b \neq a+1$, akkor bármely $n \geq 1$ esetén teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{\Gamma(n+a+1)}{(b-a-1)\Gamma(n+b)} \left(\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)\Gamma(b)} - 1 \right). \tag{6.1}$$

Lemma 6.2. *Ha a tetszőlesges nemnegatív valós szám, akkor*

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a \qquad n \to \infty \tag{6.2}$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)}}{n^a} = 1.$$

Bizonyítás: Tétel 3.5 Láttuk már korábban, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \gamma_n \tilde{S}_n \qquad \text{m.b.}$$

Felhasználjuk továbbá azt is, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(\xi_1) = m_1 \\
&\mathbb{E}(X_2) = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_1 = m_1 \\
&\vdots \\
&\mathbb{E}(X_k) = \frac{\alpha}{k-1}\underbrace{(m_1 + \cdots + m_1)}_{(k-1)-szer} + (1-\alpha)m_1 = m_1.
\end{aligned}$$

amiből rögtön adódik a toronyszabály alkalmazásával, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) = \gamma_n \mathbb{E}(\tilde{S}_n)$$

A fenti formulát iterálva azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_n) = \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_1)}{a_n} = \frac{S_1 - m_1}{a_n} = \frac{0}{a_n}.$$

Ebből pedig az $\mathbb{L}^1$-beli konvergencia okán

$$\mathbb{E}(L) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(L_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{a_n \tilde{S}_n}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = 0.$$

Hasonlóan járunk el a következőkben.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\tilde{S}_n^2 + 2\tilde{S}_n\tilde{X}_{n+1} + \tilde{X}_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \\
&= \left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right)\tilde{S}_n^2 - 2m_1\frac{\alpha}{n}\tilde{S}_n + \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + (1-\alpha)m_2 - m_1^2.
\end{aligned}$$

Felhasználjuk továbbá, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(\xi_1^2) = m_2 \\
&\mathbb{E}(X_2^2) = \alpha m_2 + (1-\alpha)m_2 = m_2 \\
&\vdots \\
&\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{\alpha}{k-1}\underbrace{(m_2 + \cdots + m_2)}_{(k-1)-szer} + (1-\alpha)m_2 = m_2.
\end{aligned}$$

Az előbbiekből és a toronyszabály alkalmazásából adódik, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}^2) = \left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right) \mathbb{E}(\tilde{S}_n^2) + m_2 - m_1^2.$$

Vezessük be a $c = m_2 - m_1^2$ jelölést. Ekkor a fenti formulát iterálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{S}_n^2) &= c + \frac{n-1+2\alpha}{n-1}\left(c + \frac{n-2+2\alpha}{n-2}\left(c + \frac{n-3+2\alpha}{n-3} \dots \left(c + \frac{1+2\alpha}{1} m_2\right) \dots \right)\right) \\
&= c\left(1 + \frac{n-1+2\alpha}{n-1} + \frac{n-1+2\alpha}{n-1}\frac{n-2+2\alpha}{n-2} + \dots \frac{n-1+2\alpha}{n-1} \dots \frac{2+2\alpha}{2}\right) + \\
&\quad \frac{n-1+2\alpha}{n-1} \dots \frac{1+2\alpha}{1} m_2 \\
&= c\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1+2\alpha}{n-1} \dots \frac{n-k+2\alpha}{n-k} + \frac{n-1+2\alpha}{n-1} \dots \frac{1+2\alpha}{1} m_2 \\
&= c\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n)\Gamma(n-k+2\alpha)} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)} m_2 \\
&= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)}\left(c\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(n-k+2\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)} m_2\right) \\
&= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)}\left(c\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+2\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)} m_2\right) \\
&\overset{(6.1)}{=} \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)}\left(c\frac{\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)}\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)} - 1\right) + \frac{m_2}{\Gamma(1+2\alpha)}\right) \\
&= \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)}\left(\frac{c}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{c\Gamma(n+1)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+2\alpha)} + \frac{m_2}{\Gamma(1+2\alpha)}\right) \\
&= \frac{c\Gamma(n+2\alpha)}{(2\alpha-1)\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{cn}{2\alpha-1} + \frac{m_2\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)} \\
&\overset{c=m_2-m_1^2}{=} m_2\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{(2\alpha-1)\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{n}{2\alpha-1} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)}\right) - \\
&\quad \frac{m_1^2}{2\alpha-1}\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2\alpha)} - n\right) \\
&= nm_2\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{1}{2\alpha-1} + \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)}\right) \\
&\quad - \frac{nm_1^2}{2\alpha-1}\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)} - 1\right)
\end{aligned}$$

A fenti számolás eredményéből és Lemma (6.2)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{S}_n^2) &\sim nm_2\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)}+\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)}\right)\\&-\frac{nm_1^2}{2\alpha-1}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)}\\&=n\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{(2\alpha-1)\Gamma(n+1)\Gamma(1+2\alpha)}(2\alpha m_2-m_1^2)\end{aligned}$$

ezekből pedig azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_n^2) &= \frac{a_n^2\mathbb{E}(\tilde{S})_n^2}{\Gamma(\alpha+1)^2}=\frac{a_n^2}{\Gamma(\alpha+1)}\mathbb{E}(\tilde{S}_n^2)\\&=\underbrace{\frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(n+\alpha)^2}}_{A}n\underbrace{\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)}\frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)}}_{B}(2\alpha m_2-m_1^2).\end{aligned}$$

Mivel $A\sim n^{-2\alpha}$ és $B\sim n^{2\alpha-1}$, ezért azt kapjuk, hogy a keresett második momentum az $\mathbb{L}^2$-beli konvergencia miatt a következő

$$\mathbb{E}(L^2)=\frac{2\alpha m_2-m_1^2}{(2\alpha-1)\Gamma(1+2\alpha)}.$$

■

7

Összegzés

References

[1] Bernard Bercu, *A martingale approach for the elephant random walk.* J. Phys. A: Math. Theor. 51, 015201 (2018).