

Véletlen permutációk ciklusstruktúrája: egy
keveredési modell

VETŐ BÁLINT
negyedéves matematikus hallgató
BME TTK

Konzulenseim:

DR. TÓTH BÁLINT
DR. VALKÓ BENEDEK
BME Sztochasztika Tanszék

2004. dec. 20.

1. Bevezetés

Napjaink sokat vizsgált és gyorsan fejlődő területe a véletlen gráfok elmélete, melynek eredményeiről összefoglalva a [4] munkában olvashatunk. A *véletlen gráf* fogalmával először Erdős Pálnál [2] találkozunk az 1940-es évek végén, mikor egy bizonyos tulajdonságú Ramsey-gráf létezését bizonyítja a valószínűségszámítási módszerrel. A klasszikus Erdős-Rényi-féle $G(n, p)$ véletlen gráf olyan valószínűségi változónak tekinthető, melynek értéke a $V^{(n)} := \{1, \dots, n\}$ ponthalmazon definiált gráf, az élhalmazt pedig úgy kaphatjuk meg, hogy minden pontpár közé egymástól függetlenül p valószínűséggel húzunk élet.

A *véletlen gráf folyamat* olyan sztochasztikus folyamat, mely egy gráf időbeli fejlődését írja le. Ezt a fogalmat Erdős Pál és Rényi Alfréd [3] vezette be: a kiinduló gráf n csúcsú, élek nélküli; majd minden lépésben az előbbiektől függetlenül behúzunk egy élet, melyet a még összekötetlen pontpárok közül választunk egyenletes eloszlással. Az Erdőstől és Rényitől származó tétel szerint ha $t \leq cn$, ahol $c < 1/2$, akkor a véletlen gráf legnagyobb komponense majdnem biztosan aszimptotikusan $\mathcal{O}(\log n)$ méretű, amint $n \rightarrow \infty$. A $c = 1/2$ esetben hasonló állítható $\log n$ helyett bármely olyan függvénnyel, amely $n^{2/3}$ -nál gyorsabban nő. Ha pedig $c > 1/2$, akkor cn lépés után aszimptotikusan majdnem biztosan kialakul egy n -nel összemérhető nagyságú ún. óriáskomponens.

Ennek általánosítása a *folytonos idejű véletlen gráf folyamat*, mely az n pontú K_n teljes gráf minden e éléhez egy T_e valószínűségi változót rendel, melyek függetlenek, és valamilyen közös folytonos eloszlásúak. Ekkor a $G(t)$ gráf a t időpontban azon e élekből áll, amelyekre $T_e \leq t$. Világos, hogy a $p = \mathbb{P}(T_e \leq t)$ paraméterválasztással éppen az Erdős-Rényi-féle $G(n, p)$ véletlen gráfot kapjuk. Ezt a modellt Stepanov [7] írta le először.

A véletlen gráf folyamatokkal szoros kapcsolatban áll az időben véletlenül fejlődő permutációk ciklusstruktúrája a következő modellben: tekintsük a $V^{(n)} = \{1, \dots, n\}$ -on az egymástól független $T_i^{(n)}$ $i = 1, 2, \dots$ véletlen transzpozíciókat, melyet az összes transzpozíció közül egyenletes eloszlással választunk. A

$$\pi^{(n)}(t) = T_t^{(n)} \circ T_{t-1}^{(n)} \circ \dots \circ T_1^{(n)} \quad (1)$$

véletlen permutáció ciklusfelbontásának (ciklushosszainak) időbeli változását vizsgáljuk. A transzpozíciók egyenletes választása miatt ha σ a $V^{(n)}$ halmaz egy rögzített permutációja, akkor $\pi^{(n)}(t)$ és $\sigma^{-1} \circ \pi^{(n)}(t) \circ \sigma$ eloszlása megegyezik, ezért a $\pi^{(n)}(t)$ permutáció konjugáltosztályának eloszlása már meghatározza $\pi^{(n)}(t)$ eloszlását, és mivel a ciklusstruktúra kijelöli $\pi^{(n)}(t)$

konjugáltosztályát, ezért a ciklushosszak eloszlásának leírásával megkapjuk a $\pi^{(n)}(t)$ permutáció eloszlását is.

A $\pi^{(n)}(t)$ permutációnak megfeleltethetjük azt a gráfot, amelyben azokat az éleket húzzuk be, amelyeknek megfelelő pontpárt felcserélő transzpozíció szerepelt $T_i^{(n)}$ $i = 1, \dots, t$ között. *Oded Schramm* [6] idei eredménye annak bizonyítása, hogy $c > 1/2$ esetén (amikor az Erdős-Rényi-tétel már megengedi a nagyobb komponensek előfordulását is) a $t = cn$ lépés után kialakuló $\pi^{(n)}(t)$ véletlen permutációban már megjelennek az (n -nel összemérhető nagyságú) óriásciklusok. Ezen komponensek részarányait nagyság szerint csökkenő sorrendbe állítva határeloszlásként megfelelő normálással 1 paraméterű Poisson-Dirichlet eloszlást kapunk.¹

A kérdéskört először témavezetőm, *Tóth Bálint* [8] vetette föl a probléma kvantumfizikai alkalmazása miatt a következő megfogalmazásban: a G lokálisan véges gráf minden e élén tekintsük egymástól függetlenül a β paraméterű Z_e Poisson pontfolyamatokat valamely $\beta > 0$ -val. Definiáljuk azt a véletlen bolyongást G -n, amely egy v_0 kezdőpontból indulva a gráf élein halad úgy, hogy egy v pontból azon az élen megy tovább, amelyhez tartozó Z pontfolyamat először növekszik a v -vel szomszédos élekhez rendelt folyamatok közül. A problémakör nyitott kérdésekben gazdag: igaz-e például, hogy a G -n való klasszikus véletlen bolyongás pontosan akkor tranziens, ha a Tóth Bálint által leírt bolyongás valamely $\beta > 0$ -ra pozitív valószínűséggel végtelen sok pontot látogat meg. *Omer Angel* [1] nemrég megjelent eredménye a reguláris fák esetét tárgyalja.

2. Az általam választott modell

A dolgozatomban olyan modellt vizsgálok, amely hasonló a Schramm által leírthoz, de a $T_i^{(n)}$ transzpozíciókat más szabály szerint sorsolom: a $V^{(n)}$ halmaz egyik eleme ($1 \in V^{(n)}$) kitüntetett, és $T_i^{(n)}$ -et az identikus permutáció és az összes olyan transzpozíció közül választom egyenletes eloszlással, amelyek a megjelölt elemet is mozgatják. Így minden lépésben a lehetséges választások száma n lesz.

Egy másik leírás adhat magyarázatot arra, miért lehet érdekes ez a dinamika, melyet *egy keverő által generált véletlen permutációnak* nevezek: az n pontot feleltessük meg n számozott golyónak, amelyek kezdetben a nekik megfelelő számozott helyeken találhatóak. A golyók helyét minden lépésben egy keverő (légy, manó) változtatja, mely szintén helyhez kötött. A golyók közül az egyik kitüntetett, ez a keverő kiindulási helye. Az első lépésben a

¹A Poisson-Dirichlet eloszlás definíciója a 6. fejezetben olvasható.

keverő a megjelölt golyót kicseréli egy másikkal, amelyet az összes golyó közül egyenletes eloszlással választ (ha a megjelölt golyót választotta, akkor nem történik semmi). Ezután a keverő a kiválasztott golyó új helyére kerül. Minden további lépésben az előbbiektől függetlenül történik a cserélendő golyó kiválasztása, és a keverő végig a kijelölt golyóval együtt mozog. Ez esetben azt a $\pi^{(n)}(t)$ permutációt vizsgáljuk, amely a golyókat az eredeti helyükről a t lépés utáni helyükre viszi.

Itt is elmondható, hogy elég a $\pi^{(n)}(t)$ permutáció ciklusfelbontásának eloszlását meghatározni (külön tekintve a keverő ciklusát), mert ez már megadja $\pi^{(n)}(t)$ konjugáltosztályának eloszlását, ha a $V^{(n)}$ halmazon a megjelölt elemet fixen hagyó σ permutációkkal való konjugálásokat tekintjük. A konjugáltosztályok eloszlásából pedig már $\pi^{(n)}(t)$ eloszlása is kiszámítható.

Amíg $T_i^{(n)}$ $i = 1, \dots, t$ között csupa különböző transzpozíciók kerülnek sorra (ill. a keverő olyan pontokra lép, ahol még nem járt), addig egyetlen – minden lépésben növekvő – ciklusból és fixpontokból áll a $\pi^{(n)}(t)$ permutáció ciklusfelbontása. Ha ismétlődés következik be a transzpozíciók között, akkor a ciklus kettéválk, és csak az a rész folytatja a növekedést, amelyikben a megjelölt elem (a keverő) van. Ezt a továbbiakban *aktív* vagy *növekedő ciklus*nak nevezem. Ha a ciklusfelbontás már több nemtriviális ciklusból áll, akkor az is előfordul, hogy a növekedő ciklus egy másikkal egyesül, amint az 1. ábrán látható. Az ábrákon a sötétített pont a keverőt, a többi pont $V^{(n)}$ egyéb elemeit jelenti. A folytonos nyilak az eredeti permutációt mutatják, a szaggatott pedig az éppen alkalmazott $T_i^{(n)}$ transzpozíciót.

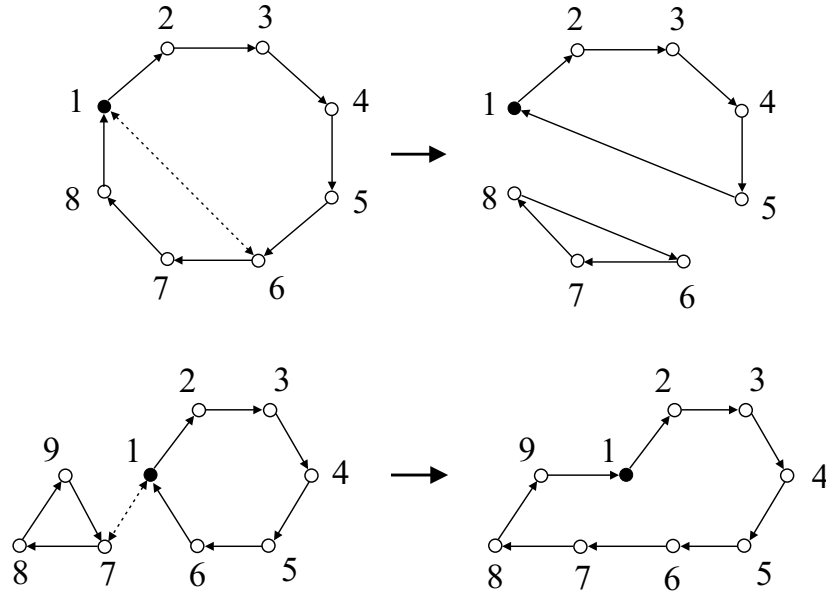
A modell egy összeolvadási-töredezési folyamatot (coagulation-fragmentation process) valósít meg, melynek határeloszlását ($n \rightarrow \infty$) szeretnénk megismerni.

3. Matematikai tárgyalás

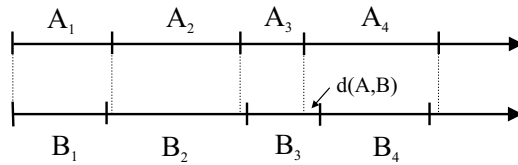
A fent ismertetett modellben (1) alapján definiált $(\pi^{(n)}(t))_{t=0}^{\infty}$ diszkrét idejű sztochasztikus folyamat időben inhomogén átmenetvalószínűségű Markov-lánc, melynek állapottere a $V^{(n)}$ halmaz összes permutációinak halmaza. Mivel csak a $\pi^{(n)}(t)$ ciklusfelbontásával szeretnénk foglalkozni, ezért elég a permutációk helyett csak a felbontásban szereplő ciklusok hosszait tekinteni, így más állapottérre célszerű áttérni.

1. definíció.

$$\mathbf{S} := \{(s_0, s_1, s_2, \dots) : s_n \in \mathbb{R}, \quad s_n \geq 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq \dots \text{ és } s_i > 0 \text{ csak véges sok } i\text{-re}\} \quad (2)$$



1. ábra. Ciklusok egyesülése és szétválása



2. ábra. Az \mathbf{S} -en értelmezett távolság

Ahhoz, hogy konvergenciát értelmezhessünk, topológiára van szükség, ezért \mathbf{S} -et metrizáljuk a következő távolsággal (amit a 2. ábra is szemléltet):

2. definíció. Ha $A = (A_0, A_1, A_2, \dots)$ és $B = (B_0, B_1, B_2, \dots)$ \mathbf{S} -beli elemek, akkor távolságukon a

$$d(A, B) := \sup \left\{ \left| \sum_{j=0}^k A_j - \sum_{j=0}^k B_j \right| : k = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (3)$$

számat értjük.

3. definíció. A $\pi^{(n)}(t)$ permutációhoz rendeljük hozzá a

$$\mathbf{C}^{(n)}(t) := (C_0^{(n)}(t), C_1^{(n)}(t), C_2^{(n)}(t), \dots)$$

S-beli értékű (ez esetben komponensenként egész értékű) valószínűségi változó vektort, amelyben $C_0^{(n)}(t)$ az aktív ciklus hossza, $C_1^{(n)}(t), C_2^{(n)}(t), \dots$ pedig azon ciklusok hosszai nemnövekvő sorrendben, amikben van olyan elem, melyet a $(T_i^{(n)})_{i=1}^t$ transzpozíciók mozgattak. A többi $C_i^{(n)}(t)$ -t pedig válasszuk 0-nak.²

Ezzel olyan leíráshoz jutunk, amelyből ugyan nem határozható meg az eredeti $\pi^{(n)}(t)$ permutáció, de a ciklusok méretére vonatkozóan minden szükséges információt tartalmaz, ezért majd a $(\mathbf{C}^{(n)}(t))_{t=0}^\infty$ folyamatot vizsgáljuk. (Az állapottér ilyen megválasztása és a nem aktív ciklusok sorba rendezése a problémának nem természetes része, de a matematikai leíráshoz szükséges.)

A tárgyalást egyszerűsíti, ha a folyamatot úgy vizsgáljuk, hogy először együtt kezeljük a ciklusok összeolvadását ill. szétdarabolódását (hiszen mindkettő akkor következik be, ha a keverő olyan helyre lép, ahol már járt). Ha ezen események idejét már meghatároztuk, akkor kisorsolhatjuk, hogy a megfelelő időpontban a kettő közül melyik következzen be. Ezzel a feladatot két könnyebben kezelhető részre bontottuk.

3.1. A keverő mozgása

A keverő mozgását egy $(B_t^{(n)})_{t=0}^\infty$ bolyongás adja meg a $V^{(n)}$ halmazon, mely minden lépésben térben és időben homogén módon $\frac{1}{n}$ valószínűséggel jut el a többi pont bármelyikébe ill. marad helyben.

4. definíció. Legyen

$$V_i^{(n)} := \#\{k \leq i : \exists j < k : B_j^{(n)} = B_k^{(n)}\} \quad (4)$$

a $(B_t^{(n)})_{t=0}^\infty$ bolyongás visszalépéseinek³ száma i -ig, vagyis hogy a keverő hány-szor lépett olyan helyre, ahol már járt.

Ha valamely i -re ismerjük a $V_i^{(n)}$ valószínűségi változó értékét, akkor tudjuk, hogy a keverő eddig az n pont közül pontosan $i + 1 - V_i^{(n)}$ -ben járt a kiindulást is beleértve, ezért a

$$\mathbb{P}\left(V_{i+1}^{(n)} - V_i^{(n)} = 1 \mid V_i^{(n)}\right) = \frac{i + 1 - V_i^{(n)}}{n}, \quad (5)$$

$$\mathbb{P}\left(V_{i+1}^{(n)} - V_i^{(n)} = 0 \mid V_i^{(n)}\right) = 1 - \frac{i + 1 - V_i^{(n)}}{n} \quad (6)$$

²Azért ez a $C_i^{(n)}(t)$ $i = 1, 2, \dots$ megfelelő választása, hogy azok pontosan a folyamatba már bekapcsolt elemeket (összesen a keverő által meglátogatott pontokat) számlálják.

³beleértve a helyben maradásokat is

feltételes valószínűségek adják a $(V_t^{(n)})_{t=0}^\infty$ Markov-lánc átmenetvalószínűségeit.

Láthatjuk, hogy ugyan a $(B_t^{(n)})_{t=0}^\infty$ bolyongás a $(\mathbf{C}^{(n)}(t))_{t=0}^\infty$ vektorokból nem határozható meg, de a számunkra a későbbiekben rendkívül fontos visszalépések száma a

$$V_i^{(n)} = i + 1 - \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(n)}(i) \quad (7)$$

képlet alapján kiszámítható.

3.2. Természetes skálázás

Célunk a folyamat határeloszlását meghatározni, amint $n \rightarrow \infty$, de ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy a limesz ne triviális folyamat legyen. Ehhez az idő megfelelő átskálázására (felgyorsítására) van szükség. Tegyük fel, hogy eddig $k(n)$ lépést tettünk meg az n pontú modellben. Azt szeretnénk, hogy annak a valószínűsége, hogy eddig nem következett be visszalépés, ne legyen triviális (vagyis ne 0-hoz vagy 1-hez tartson, amint $n \rightarrow \infty$). Ez éppen azt biztosítja, hogy a határfolyamat ne csak egyetlen növekedő ciklusból álljon, ill. ne történjen véges idő alatt végtelen sok lépés. A megfelelő valószínűség pedig

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(V_{k(n)}^{(n)} = 0\right) &= \prod_{i=1}^{k(n)} \mathbb{P}\left(V_i^{(n)} = 0 \mid V_{i-1}^{(n)} = 0\right) = \prod_{i=1}^{k(n)} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\ &= \exp \sum_{i=1}^{k(n)} \log \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \exp \sum_{i=1}^{k(n)} \left(-\frac{i}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp \left(-\frac{k(n)(k(n)-1)}{2n} + \mathcal{O}\left(k(n) \cdot \frac{k(n)^2}{n^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

A számolásnál kihasználtam a $V_i^{(n)}$ Markov-tulajdonságát, majd a log függvény 1 körüli Taylor-sorfejtését, vagyis hogy $\log(1 + \varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ amint $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ha $k(n)$ -et \sqrt{n} nagyságrendűnek választjuk, akkor a (8) valószínűség éppen a kívánt módon nemtriviális értékhez tart ($n \rightarrow \infty$), a hibtag pedig a limeszben eltűnik. Ez az érvelés mutatja, hogy a modellben az idő természetes skálázása a \sqrt{n} -szeresre való felgyorsítás. Ezzel együtt a ciklusok méreteit is \sqrt{n} -hez kell viszonyítani, hogy létezessen a határértékük.

3.3. A visszalépések számának határeloszlása

A természetes skálázás mellett tehát a $(\pi^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor))_{t \geq 0}$ permutációban kell a ciklusméretek időbeli fejlődésére határeloszlást meghatározni úgy, hogy a ciklusok méreteit \sqrt{n} -hez viszonyítjuk, vagyis $\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}\right)_{t \geq 0}$ -t vizsgáljuk. Első lépésként célszerű csak a $\lfloor \sqrt{nt} \rfloor$ -ig bekövetkezett visszalépések számát megmondani az n -hez tartozó folyamatban, vagyis a $(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)})_{t \geq 0}$ határeloszlását, amint $n \rightarrow \infty$.

1. tétel. *Legyen $(V_t)_{t \geq 0}$ t sűrűségű inhomogén Poisson pontfolyamat. Ekkor*

$$(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)})_{t \geq 0} \xrightarrow{d} (V_t)_{t \geq 0} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9)$$

a véges dimenziós marginális eloszlások értelmében.

Bizonyítás: Először kiszámoljuk rögzített t mellett a $V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)}$ valószínűségi változó sorozat eloszlásának gyenge limeszét. Utána hasonló, de bonyolultabb számolás mutatja majd, hogy diszjunkt időintervallumokban a folyamat növekményei független Poisson-eloszlásúak a megfelelő paraméterekkel.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)} = k\right) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \lfloor \sqrt{nt} \rfloor} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{i_1 - 1}{n}\right) \frac{i_1}{n} \left(1 - \frac{i_1}{n}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{i_k - k}{n}\right) \frac{i_k - (k-1)}{n} \left(1 - \frac{i_k - (k-1)}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k}{n}\right) \\ &= \prod_{m=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \lfloor \sqrt{nt} \rfloor} \prod_{j=1}^k \frac{i_j - (j-1)}{n} \\ &= \prod_{m=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \left[\left(\sum_{i_1=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} \dots \sum_{i_k=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} \prod_{j=1}^k \frac{i_j - (j-1)}{n} \right) + \mathcal{O}\left(n^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{n^{\frac{k}{2}}}{n^k}\right) \right] \\ &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} -\frac{m}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right) \cdot \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=1}^k \left(\sum_{i_j=1}^{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor - k} \frac{i_j}{n} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \\ \mathbb{P}\left(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)} = k\right) &\rightarrow \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10) \end{aligned}$$

⁴az osztást koordinátánként értjük, vagyis $\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}} := \left(\frac{C_0^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}, \frac{C_1^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}, \dots\right)$

A számolásnál felhasználtam, hogy az $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \lfloor \sqrt{nt} \rfloor$ k -asokra vett összegzés nem sokkal tér el attól, mintha az i_1, \dots, i_k indexek egymástól függetlenül futnának 1-től $\lfloor \sqrt{nt} \rfloor$ -ig, majd az egészet $k!$ -sal osztanánk, hiszen azon indexkiértékelések száma, amelyeknél valamely két index megegyezik, felülről becsülhető $n^{(k-1)/2}$ konstansszorosával, az így kapott k -szoros összegzés pedig szorzattá alakítható.

Legyen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l$ rögzített. Ekkor a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ rögzített számokra

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(V_{\lfloor \sqrt{nt_1} \rfloor}^{(n)} - V_{\lfloor \sqrt{nt_0} \rfloor}^{(n)} = k_1, \dots, V_{\lfloor \sqrt{nt_l} \rfloor}^{(n)} - V_{\lfloor \sqrt{nt_{l-1}} \rfloor}^{(n)} = k_l \right) \\
&= \prod_{m=1}^{\lfloor \sqrt{nt_l} \rfloor - \sum_{j=1}^s k_j} \left(1 - \frac{m}{n} \right) \cdot \prod_{s=1}^l \left(\prod_{m=\lfloor \sqrt{nt_{s-1}} \rfloor - \sum_{j=1}^{s-1} k_j + 1}^{\lfloor \sqrt{nt_s} \rfloor - \sum_{j=1}^s k_j} \right. \\
&\quad \left. \sum_{\lfloor \sqrt{nt_{s-1}} \rfloor - \sum_{j=1}^{s-1} k_j + 1 \leq i_{s,1} < \dots < i_{s,k_s} \leq \lfloor \sqrt{nt_s} \rfloor - \sum_{j=1}^s k_j} \prod_{j=1}^{k_s} \frac{i_{s,j} - (j-1)}{n} \right) \\
&\rightarrow \prod_{s=1}^l \exp \left(- \left(\frac{t_s^2}{2} - \frac{t_{s-1}^2}{2} \right) \right) \frac{1}{k_s!} \left(\frac{t_s^2}{2} - \frac{t_{s-1}^2}{2} \right)^{k_s} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (11)
\end{aligned}$$

Ez azért teljesül, mert (10)-hez teljesen hasonló a szorzat minden tagjára elvégezhetünk.

Így az az eredmény adódik, hogy létezik a $(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)})_{t \geq 0}$ határfolyamat, amint $n \rightarrow \infty$, és tetszőlegesen választott diszjunkt $[a_i, b_i]$ intervallumokban egymástól független $\frac{1}{2}(b_i^2 - a_i^2)$ paraméterű Poisson-eloszlás szerint növekszik, azaz egy inhomogén t sűrűségű Poisson-folyamat, amint a tétel állította.

4. Határeloszlás bizonyítása csatolással

A fenti állításnál több is bizonyítható. Nem csak a visszalépések idejét megadó $(V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)})_{t \geq 0}$ folyamatra, hanem magára $\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0}$ -ra is belátható a konvergencia. Ráadásul az eloszlások konvergenciájánál erősebbet igazolunk a *csatolás* módszerével: egy megfelelően választott valószínűségi mezőn egyszerre valósítható meg minden n -re $\mathbf{C}^{(n)}$ ill. a határfolyamat úgy, hogy elég nagy n -re 1-hez közeli valószínűséggel $\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0}$ tetszőlegesen közel lesz a limeszfolyamathoz.

5. definíció. Legyen

$$\mathbf{C}(t) := (C_0(t), C_1(t), C_2(t) \dots)$$

\mathbf{S} -beli értékű, folytonos idejű sztochasztikus folyamat.

$$C_i(0) := 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

A folyamat fejlődése a $C_0(t)$ koordináta lineáris egység sebességű növekedéséből áll, valamint abból, hogy a $(V_t)_{t \geq 0}$ t sűrűségű Poisson pontfolyamat által meghatározott időpontokban összeolvadás vagy törés következik be az $(U_i)_{i=1}^\infty$ egymástól és $(V_t)_{t \geq 0}$ -tól független $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változóktól függően az alábbiak szerint:

Jelölje τ_k a V_t pontfolyamat k -adik növekedési pontját (vagyis $V_{\tau_k} = k$ és $V_{\tau_{k-}} = k - 1$)⁵

1. Törés következik be, ha $U_k \leq C_0(\tau_{k-}) / \sum_{j=0}^\infty C_j(\tau_{k-})$. Legyen ebben az esetben $C_0(\tau_k) := U_k \sum_{j=0}^\infty C_j(\tau_{k-})$, és a $C_0(\tau_{k-}) - U_k \sum_{j=0}^\infty C_j(\tau_{k-})$ számot vegyük hozzá a $(C_i(\tau_{k-}))_{i=1}^\infty$ sorozathoz, majd ezt rendezve alakuljon ki a $(C_i(\tau_k))_{i=1}^\infty$ sorozat.
2. Egyébként összeolvadás történik: ha $U_k > C_0(\tau_{k-}) / \sum_j C_j(\tau_{k-})$, akkor 1 valószínűséggel kiválasztható egy olyan $i > 0$ index, amelyre

$$\frac{\sum_{j=0}^{i-1} C_j(\tau_{k-})}{\sum_{j=0}^\infty C_j(\tau_{k-})} < U_k \leq \frac{\sum_{j=0}^i C_j(\tau_{k-})}{\sum_{j=0}^\infty C_j(\tau_{k-})}$$

teljesül. Ebben az esetben $C_0(\tau_k) := C_0(\tau_{k-}) + C_i(\tau_{k-})$, legyen továbbá $C_j(\tau_k) := C_j(\tau_{k-})$ ha $1 \leq j < i$, ill. $C_j(\tau_k) := C_{j+1}(\tau_{k-})$ ha $j \geq i$, vagyis az i -edik ciklus a növekedő ciklushoz ragad, és a sorrendet helyreállítjuk.

Dolgozatom fő eredménye a következő

2. tétel. Létezik olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, amelyen egyszerre megvalósulnak a $(\mathbf{C}^{(n)}(t))_{t=0}^\infty$ $n = 1, 2, \dots$ diszkrét és a $(\mathbf{C}(t))_{t \geq 0}$ folytonos idejű folyamatok úgy, hogy minden $t > 0$ -ra

$$\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathbf{C}(t) \quad \mathbb{P}\text{-majdnem biztosan} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (12)$$

a (3) távolság értelmében, továbbá a konvergencia bármely véges $[0, T]$ intervallumon egyenletes.

⁵ $V_{\tau_{k-}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} V_{\tau_{k-\varepsilon}}$

A tétel bizonyítása a következő lépésekben történik: először létrehozom azt a „kellően gazdag” valószínűségi mezőt, amelyen a $(\mathbf{C}(t))_{t \geq 0}$ határfolyamat természetes módon megjelenik. A diszkrét $(\mathbf{C}^{(n)}(t))_{t=0}^{\infty}$ folyamatok konstrukcióját pedig két részre bontom: előbb a visszalépések idejének megfelelő $(V_t^{(n)})_{t=0}^{\infty}$ folyamatot állítom elő és látom be az 1. tétel felhasználásával a majdnem biztos konvergenciát. Ezután előírom, hogy a $(V_t^{(n)})_{t=0}^{\infty}$ folyamatok növekedési pontjai által meghatározott időpontokban hogyan változzon a $\mathbf{C}^{(n)}$ vektor, majd megmutatom, hogy bármely $t \geq 0$ -ra 1-hez közeli valószínűséggel a $\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}$ vektorok tetszőlegesen közel kerülnek a $\mathbf{C}(t)$ határfolyamathoz (a (3) által definiált távolság értelmében), ha n elég nagy.

4.1. A $V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)}$ folyamat konvergenciája

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, amelyen adott a $(V_t)_{t \geq 0}$ t intenzitású inhomogén Poisson pontfolyamat, továbbá ettől és egymástól függetlenül az $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ ill. $(Z_i^{(n)})_{i,n=1}^{\infty}$ $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

A $(V_t)_{t \geq 0}$ folyamatból és az $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ változókból a fent leírt módon elkészíthető a $(\mathbf{C}(t))_{t \geq 0}$ folyamat a kívánt eloszlással. Ennek segítségével először létrehozuk a $(V_i^{(n)})_{i=0}^{\infty}$ (majd később a $(\mathbf{C}^{(n)}(i))_{i=0}^{\infty}$) diszkrét folyamatokat. A konstrukció alapötlete az, hogy a $(V_t)_{t \geq 0}$ folyamatot $\frac{1}{\sqrt{n}}$ hosszú időintervallumokra osztva figyeljük, és az egyes intervallumokban történt növekedéseket elég csak annyira korrigálni a $(V_i^{(n)})_{i=0}^{\infty}$ folyamatok növekedésének meghatározásához, hogy a korrekció valószínűsége az $n \rightarrow \infty$ határátmenetben eltűnik.

6. definíció. *Legyenek az*

$$X_i^{(n)} := \mathbb{1} \left(V_{\frac{i}{\sqrt{n}}} - V_{\frac{i-1}{\sqrt{n}}} \geq 1 \right) \quad i = 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Bernoulli-eloszlású valószínűségi változók

$$p_i^{(n)} := 1 - \exp \left(-\frac{2i-1}{2n} \right) \quad (14)$$

paraméterrel, melyek a $(V_t)_{t \geq 0}$ folyamat $\frac{1}{\sqrt{n}}$ hosszú intervallumaiban bekövetkezett növekedések indikátorai.

Ezek segítségével definiálom a $V_i^{(n)}$ értékeket rögzített n mellett i -re vonatkozó indukcióval. Világos, hogy ha ismerjük $V_{i-1}^{(n)}$ -et, akkor ezen feltétel

mellett annak a valószínűsége, hogy az i -edik lépésben történik-e visszalépés (vagyis összeolvadás vagy törés), (5) alapján

$$q_i^{(n)} := \frac{i}{n} - \frac{V_{i-1}^{(n)}}{n} \quad (15)$$

kell, hogy legyen.

7. definíció.

$$V_0^{(n)} := 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Továbbá az

$$\begin{aligned} Y_i^{(n)} := & X_i^{(n)} - \mathbb{1} \left(p_i^{(n)} > q_i^{(n)} \right) \mathbb{1} \left(X_i^{(n)} = 1 \right) \mathbb{1} \left(Z_i^{(n)} > \frac{q_i^{(n)}}{p_i^{(n)}} \right) \\ & + \mathbb{1} \left(p_i^{(n)} < q_i^{(n)} \right) \mathbb{1} \left(X_i^{(n)} = 0 \right) \mathbb{1} \left(Z_i^{(n)} < \frac{q_i^{(n)} - p_i^{(n)}}{1 - p_i^{(n)}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

valószínűségi változók segítségével legyen

$$V_i^{(n)} := V_{i-1}^{(n)} + Y_i^{(n)}. \quad (17)$$

Könnyen látható, hogy az $Y_i^{(n)}$ változók éppen a kívánt $q_i^{(n)}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, ezért helyes a fenti definíció, ugyanis így a $(V_i^{(n)})_{i=0}^{\infty}$ folyamatok a transzpozíciókkal generált modellnek megfelelő eloszlás szerint fejlődnek. A későbbiekben azt nevezem *korrekciónak*, ha a (16) definícióban szereplő indikátorok szorzatai nem tűnnek el. Megmutatjuk, hogy evvel a konstrukcióval a korrekció valószínűsége tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy.

1. állítás. *Legyen $t \geq 0$ rögzített. Jelölje $0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_\kappa$ a $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ folyamat növekedésének véletlen időpontjait (ezek száma, $\kappa = V_t$ is véletlen), $0 = \tau_0^{(n)}, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{\kappa^{(n)}}^{(n)}$ pedig a fentiek szerint elkészített $(V_{\lfloor \sqrt{n}\tau \rfloor})_{\tau \geq 0}$ folyamat növekedési időpontjait (ezek véletlen darabszáma $\kappa^{(n)} = V_{\lfloor \sqrt{n}t \rfloor}^{(n)}$). Ha n elég nagy, akkor a $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ és $(V_{\lfloor \sqrt{n}\tau \rfloor}^{(n)})_{\tau \geq 0}$ folyamatok növekedési pontjai 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel párosíthatók ($\kappa = \kappa^{(n)}$) úgy, hogy $|\tau_i^{(n)} - \tau_i| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $i = 1, \dots, \kappa$ fennálljon.⁶*

A bizonyításhoz hasznos a következő események bevezetése:

⁶Valójában $0 \leq \tau_i^{(n)} - \tau_i \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ -et bizonyítunk.

8. definíció. 1. Valamely $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ számhoz legyen K_ε olyan konstans, hogy $\mathbb{P}(V_t \leq K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ teljesüljön.

$$E_\varepsilon := \{V_{\lfloor \sqrt{nt} \rfloor}^{(n)} \leq K_\varepsilon \quad n = N_\varepsilon, N_\varepsilon + 1, \dots\}, \quad (18)$$

ahol N_ε olyan küszöb, amelyre $\mathbb{P}(E_\varepsilon) \geq 1 - 2\varepsilon$.

2. Ha $\sigma > 0$,

$$L_\sigma := \{V_\sigma - V_0 = 0\}. \quad (19)$$

3. Legyen $\delta > 0$,

$$M_\delta := \{\min_{i:\tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta\} \cap \{V_t - V_{t-\delta} = 0\}, \quad (20)$$

ahol τ_i a $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ folyamat i -edik növekedési időpontja.

Megjegyzés: Az E_ε esemény azt biztosítja, hogy a visszalépések számát egy n -től független konstanssal korlátozni lehessen. Az L_σ halmazon a diszkrét $(V_i^{(n)})_{i=0}^\infty$ folyamat növekedési pontjainak i indexe \sqrt{n} konstansszorosával alulról becsülhető. M_δ pedig azt garantálja, hogy elég nagy n -re (ha $\delta < \frac{1}{\sqrt{n}}$) $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ -ban ne forduljon elő többször növekedés, mint a diszkrét folyamatokban.

2. állítás. 1.

$$\mathbb{P}(E_\varepsilon) \geq 1 - 2\varepsilon \quad (21)$$

megvalósítható, vagyis létezik az N_ε véges küszöb.

2.

$$\mathbb{P}(L_\sigma) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right). \quad (22)$$

3.

$$\mathbb{P}(M_\delta) \rightarrow 1 \quad (\delta \downarrow 0). \quad (23)$$

Bizonyítás: 1. az 1. tételből következik, 2. a Poisson-folyamat definíciójából, 3. pedig a következő számolás eredménye:

$$\mathbb{P}(M_\delta) \geq \mathbb{P}(\min_{i:\tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta) - \mathbb{P}(V_t - V_{t-\delta} > 0)$$

Mivel $\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}(V_t - V_{t-\delta} > 0) = 0$, és V_t eloszlása nem hiányos (Poisson), ezért elég rögzített $k \in \mathbb{N}$ -re belátni, hogy

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}(\min_{i: \tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta | V_t = k) = 1. \quad (24)$$

A $\mathbb{P}(\min_{i: \tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta | V_t = k)$ valószínűsége a következő alsó becslés adható: osszuk fel a $[0, t]$ intervallumot különböző hosszúságú darabokra úgy, hogy a $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ folyamat súlyfüggvénye minden résznek $t\delta$ súlyt adjon. Ekkor minden rész hossza legalább δ , a darabok száma pedig $\lfloor \frac{t^2/2}{t\delta} \rfloor = \lfloor \frac{t}{2\delta} \rfloor$ (csak a teljes súlyú részeket tekintve). A $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ folyamat k darab növekedési pontját $\lfloor \frac{t}{2\delta} \rfloor$ helyre $\binom{\lfloor \frac{t}{2\delta} \rfloor - k}{k}$ -féleképpen lehet úgy elhelyezni, hogy minden részbe legfeljebb egy pont kerüljön, szomszédos részintervallumokba ne essenek pontok, és az első rész üres maradjon. A $V_t = k$ feltétel mellett az egyes részintervallumokba eső τ_i -k számának feltételes eloszlása multinomiális, így egy adott – az előbbi feltételeknek megfelelő – elhelyezkedés valószínűsége $k! \left(\frac{t}{2\delta}\right)^{-k}$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{i: \tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta | V_t = k) &\geq \binom{\lfloor \frac{t}{2\delta} \rfloor - k}{k} \cdot k! \left(\frac{t}{2\delta}\right)^{-k} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lfloor \frac{t}{2\delta} \rfloor - i}{\frac{t}{2\delta}} \rightarrow 1 \quad (\delta \downarrow 0). \end{aligned}$$

Innen a teljes valószínűség tételét alkalmazva tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén felírható a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min_{i: \tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta) &\geq \sum_{k=0}^{K_\epsilon} \mathbb{P}(\min_{i: \tau_i < t} \{\tau_i - \tau_{i-1}\} > \delta | V_t = k) \mathbb{P}(V_t = k) \\ &\rightarrow \sum_{k=0}^{K_\epsilon} \mathbb{P}(V_t = k) \geq 1 - \epsilon \quad (\delta \downarrow 0) \end{aligned}$$

becslés, amiből $\epsilon \rightarrow 0$ határátmenettel adódik az állítás.

Az 1. állítás bizonyítása: Azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{P}(\exists i \leq \lfloor \sqrt{nt} \rfloor : V_{\frac{i}{\sqrt{n}}} - V_{\frac{i-1}{\sqrt{n}}} \neq Y_i^{(n)}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (25)$$

hiszen ez azt jelenti, hogy kellően nagy valószínűséggel a határfolyamat és a diszkrét folyamatok növekedése „párhuzamos”.

Az állítást elég az $E_\epsilon \cap L_\sigma \cap M_\delta$ eseményen igazolni minden lehetséges $\epsilon, \sigma, \delta > 0$ választással, hiszen az $E_\epsilon \cap L_\sigma \cap M_\delta$ halmaz komplementere az ϵ, σ, δ megfelelő megválasztásával tetszőlegesen kis valószínűségűvé tehető.

9. definíció. Legyenek $\varepsilon, \sigma, \delta > 0$ valós számok. Jelölje $\mathbb{P}_{\varepsilon, \sigma, \delta}$ azt a (már nem valószínűségi) mértéket, amelyet az $A \in \mathcal{F}$ -beli mérhető halmazokon a

$$\mathbb{P}_{\varepsilon, \sigma, \delta}(A) := \mathbb{P}(A \cap E_\varepsilon \cap L_\sigma \cap M_\delta) \quad (26)$$

összefüggés definiál.

Legyen tehát $\varepsilon, \sigma, \delta > 0$ rögzített. Az M_δ halmazon (20) miatt a $(V_\tau)_{\tau \geq 0}$ folyamat semelyik $\left[\frac{i}{\sqrt{n}}, \frac{i+1}{\sqrt{n}}\right]$ intervallumában sem növekszik 1-nél többet, ha $n > \frac{1}{\delta^2}$, ezért elég a

$$\mathbb{P}_{\varepsilon, \sigma, \delta}(\exists i \leq \lfloor \sqrt{nt} \rfloor : X_i^{(n)} \neq Y_i^{(n)}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (27)$$

teljesülését igazolni, ami éppen azt jelenti, hogy $E_\varepsilon \cap L_\sigma \cap M_\delta$ -val elmetszve annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az 1-től $\lfloor \sqrt{nt} \rfloor$ -ig terjedő lépések közül valamikor korrekció történt, 0-hoz tart, amint $n \rightarrow \infty$.

Felhasználva az $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ ha $x \geq 0$ azonosságot, (14) alapján $p_i^{(n)}$ -re a

$$\frac{2i-1}{2n} - \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 \leq p_i^{(n)} \leq \frac{2i-1}{2n}, \quad (28)$$

a korrigált paraméterre pedig (15) miatt E_ε -on az

$$\frac{i}{n} - \frac{K_\varepsilon}{n} \leq q_i^{(n)} = \frac{i}{n} - \frac{V_{i-1}^{(n)}}{n} \leq \frac{i}{n} \quad (29)$$

becslés adódik.

A korrekció valószínűségének becslése:

1. E_ε -on $\mathbb{1}(X_i^{(n)} = 1) \neq 0$ csak legfeljebb K_ε -szor fordulhat elő, tehát annak együttes valószínűsége, hogy a $p_i^{(n)} > q_i^{(n)}$ esetekben korrekció történt, felülről becsülhető a következővel:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I, |I| \leq K_\varepsilon} \left(1 - \frac{q_i^{(n)}}{p_i^{(n)}}\right) \leq \sum_{i \in I, |I| \leq K_\varepsilon} \left(1 - \frac{\frac{i}{n} - \frac{K_\varepsilon}{n}}{\frac{2i-1}{2n}}\right) \\ & = \sum_{i \in I, |I| \leq K_\varepsilon} \frac{2i-1 - (2i-2K_\varepsilon)}{2i-1} = \sum_{i \in I, |I| \leq K_\varepsilon} \frac{2K_\varepsilon-1}{2i-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (30) \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$, mert L_σ -n i alulról becsülhető \sqrt{n} konstansszorosával.

2. A $p_i^{(n)} < q_i^{(n)}$ esetben az i -edik lépés korrekciójának valószínűsége legfeljebb

$$\frac{q_i^{(n)} - p_i^{(n)}}{1 - p_i^{(n)}} \leq \frac{\frac{i}{n} - \frac{2i-1}{2n} + \frac{(2i-1)^2}{(2n)^2}}{1 - \frac{2i-1}{2n}} = \frac{\frac{1}{2n} + \frac{(2i-1)^2}{(2n)^2}}{1 - \frac{2i-1}{2n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (31)$$

ezért a korrekció valószínűsége összegezve ($i = 1, \dots, \lfloor \sqrt{nt} \rfloor$) ebben az esetben is legalább $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sebességgel tart 0-hoz.

A számolással tehát azt igazoltuk, hogy megfelelő $\varepsilon, \sigma, \delta > 0$ mellett n -et kellően nagyra (a korrekcióbecslésben meghatározható értéknél, N_ε -nál és $\frac{1}{\delta^2}$ -nél nagyobbakra) választva 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel elérhető, hogy az összeolvadások ill. törések időpontjai párokba állítva legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -nel térjenek el egymástól a diszkrét és a folytonos esetben – amint állítottuk.

4.2. Összeolvadások és törések

A $(\mathbf{C}(t))_{t \geq 0}$ határfolyamat segítségével már megkonstruáltuk a $(\mathbf{C}^{(n)}(i))_{i=0}^\infty$ diszkrét folyamat összeolvadásainak és töréseinek időpontjait meghatározó $(V_i^{(n)})_{i=0}^\infty$ folyamatokat. Azt kell még minden egyes ilyen időpillanatban meghatározni, hogy ezek hogyan következzenek be.

Azt már tudjuk, hogy a $(\mathbf{C}(t))_{t \geq 0}$ határfolyamatnál a $(V_t)_{t \geq 0}$ folyamat k -adik növekedési pontja esetén hogyan sorsolható az U_k egyenletes eloszlású változóval a struktúra változása. Ehhez hasonlóan járjunk el a $(\mathbf{C}^{(n)}(i))_{i=0}^\infty$ esetén is a $(V_i^{(n)})_{i=1}^\infty$ növekedési pontjaiban *ugyanezekkel* az $(U_i)_{i=1}^\infty$ változókkal:

10. definíció. Legyen a $(\mathbf{C}^{(n)}(i))_{i=0}^\infty$ folyamat időbeli fejlődése a következő:

$$C_0^{(n)}(0) := 1, \quad C_j^{(n)}(0) := 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

Az $i = 1, 2, \dots$ lépésekben

- ha $V_i^{(n)} - V_{i-1}^{(n)} = 0$, akkor $C_0^{(n)}(i) := C_0^{(n)}(i-1) + 1$ és $C_j^{(n)}(i) := C_j^{(n)}(i-1)$ $j = 1, 2, \dots$,
- ha $V_i^{(n)} - V_{i-1}^{(n)} = 1$ és ez a $(V_t^{(n)})_{t=0}^\infty$ folyamat k -adik növekedési pontja (vagyis $V_i^{(n)} = k$), akkor az U_k egyenletes valószínűségi változó segítségével válasszuk ki a $\mathbf{C}^{(n)}(i-1)$ vektor l -edik komponensét, ha

$$U_k \in \left[\frac{\sum_{j=0}^{l-1} C_j^{(n)}(i-1)}{\sum_{j=0}^\infty C_j^{(n)}(i-1)}, \frac{\sum_{j=0}^l C_j^{(n)}(i-1)}{\sum_{j=0}^\infty C_j^{(n)}(i-1)} \right).$$

Ez l -et 1 valószínűséggel meghatározza. A 5. definícióhoz hasonlóan

1. $l = 0$ esetén törés történik. Ha $U_k \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(n)}(i-1) < 1$, akkor $\mathbf{C}^{(n)}(i) := \mathbf{C}^{(n)}(i-1)$. Ezt a későbbiekben fiktív törésnek nevez-
zük. Egyébként $C_0^{(n)}(i) := \lfloor U_k(\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(n)}(i-1)) \rfloor$; a $C_0^{(n)}(i-1) -$
 $\lfloor U_k(\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(n)}(i-1)) \rfloor$ számot vegyük hozzá a $(C_j^{(n)}(i-1))_{j=1}^{\infty}$ so-
rozathoz, és ennek rendezésével alakuljon ki a $(C_j^{(n)}(i))_{j=1}^{\infty}$ sorozat.
2. Ha $l > 0$, akkor összeolvadás következik be, vagyis $C_0^{(n)}(i) :=$
 $C_0^{(n)}(i-1) + C_l^{(n)}(i-1)$, továbbá a sorrend helyreállításához $C_j^{(n)}(i) :=$
 $C_j^{(n)}(i-1)$ ha $0 < j < l$, és $C_j^{(n)}(i) := C_{j+1}^{(n)}(i-1)$ ha $j \geq l$.

Megjegyzés: A $(\mathbf{C}^{(n)}(i))_{i=0}^{\infty}$ folyamatnak ez az új definíciója éppen olyan el-
oszlású, mint a transzpozíciók által generált modellben, ezért elég erre a (nem
a transzpozíciók segítségével definiált) $\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}\right)_{t \geq 0}$ -ra belátni a majdnem
biztos konvergenciát.

A 2. tétel bizonyítása: Ebben az esetben is rögzítsük $\varepsilon, \sigma, \delta > 0$ -t. Az
állítás elég az $E_\varepsilon \cap L_\sigma \cap M_\delta$ eseményen igazolni. Ez a választás biztosítja,
hogy legfeljebb K_ε lépés következett be, ill. hogy σ előtt csak növekedés
történt.

11. definíció. Jelölje

$$d_i^- := d\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)}{\sqrt{n}}, \mathbf{C}(\tau_i^-)\right), \quad d_i^+ := d\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor)}{\sqrt{n}}, \mathbf{C}(\tau_i)\right) \quad (32)$$

a két folyamat távolságát az i -edik összeolvadás/törés előtti ill. utáni pillá-
natban.

Ameddig csak növekedés történik, addig $d\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}, \mathbf{C}(t)\right)$ legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -
nel ingadozhat, ami abból adódik, hogy $\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}\right)_{t \geq 0}$ növekedése diszkrét
($\frac{1}{\sqrt{n}}$ többszöröseire koncentrált), a határfolyamaté pedig folytonos.

Mivel a diszkrét folyamat növekedésének késleltetése a határfolyamaté-
hoz képest legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (az 1. állítás alapján), és az átskálázott diszkrét
folyamatban az aktív ciklus csak $\frac{1}{\sqrt{n}}$ többszöröseiben növekszik, ezért

$$d_i^- \leq d_{i-1}^+ + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad (33)$$

vagyis az összetartozó összeolvadásokkor vagy törésekkor meglévő távolság a következő összeolvadás/törés előtti pillanatig csak $\frac{1}{\sqrt{n}}$ rendben növekedhet.

Elég tehát csak az összeolvadási/törési pontokat vizsgálni. Előfordulhat, hogy az i -edik lépésben az U_i egyenletes eloszlású változó segítségével $\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)$ -nek ill. $\mathbf{C}(\tau_i^-)$ -nak más-más komponensét választjuk ki, vagy fiktív törés történik. Nevezzük ezeket *kellemetlen eseményeknek*, hiszen ekkor $d(\mathbf{C}^{(n)}/\sqrt{n}, \mathbf{C})$ növekedését nem tudjuk becsülni. Belátjuk, hogy ennek valószínűsége 0-hoz tart, amint $n \rightarrow \infty$.

\mathbf{C} és $\mathbf{C}^{(n)}$ valamelyik komponensének kiválasztását tekinthetünk úgy, hogy a $\mathbf{C}(\tau_i^-)$ vektor koordinátáit sorban felmérjük 0-tól a számegyenesre, majd ugyanezt meg tesszük a $\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}$ vektorral azzal a különbséggel, hogy ez esetben a koordináták $\frac{\sum_j C_j(\tau_i^-)}{\sum_j C_j^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}}$ -szeresét mérjük fel, így a lefedett szakaszok hosszai egyenlőek $(\sum_j C_j(\tau_i^-))$ lesznek. Ezért a kellemetlen események valószínűsége éppen azon pontthalmaz mértékének aránya $\sum_j C_j(\tau_i^-)$ -hoz képest, amelyhez \mathbf{C} -nek ill. $\mathbf{C}^{(n)}$ -nek különböző indexű darabját rendeltük.

Könnyen látható, hogy

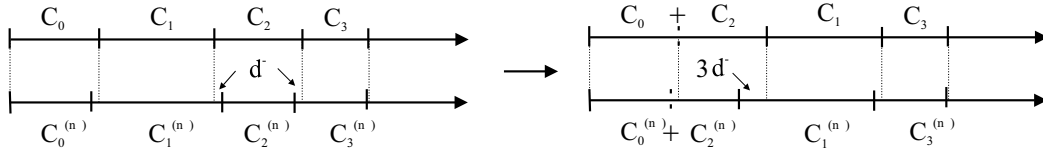
$$\left| \sum_j C_j(\tau_i^-) - \frac{\sum_j C_j^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{K_\varepsilon}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (34)$$

mert a legfeljebb K_ε darab összeolvadási/törési pontban a diszkrét folyamat összhossza nem nő, csak a folytonosé, a másik tag $\tau_i^{(n)} - \tau_i \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ -ből adódik. Ezért a \mathbf{C} -ből ill. $\mathbf{C}^{(n)}$ -ből származó lefedések osztópontjai legfeljebb $\frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -nel csúszhatnak el egymáshoz képest, vagyis az osztópontok távolságainak maximuma legfeljebb $\frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}} + d_i^-$ lesz az i -edik összeolvadás/törés előtti pillanatban. Így a legfeljebb K_ε darab osztópont mellett annak valószínűsége (pontosabban $\mathbb{P}_{\varepsilon,\sigma,\delta}$ -mértéke), hogy egy pont \mathbf{C} -nek és $\mathbf{C}^{(n)}$ -nek különböző indexű koordinátájával van lefedve, legfeljebb

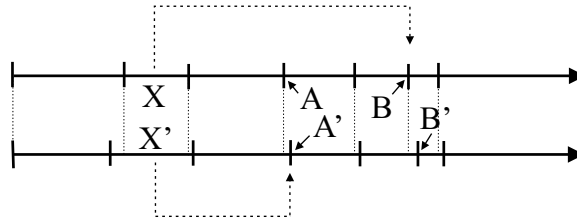
$$\frac{\frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}} + d_i^-}{\sum_{j=0}^{\infty} C_j(\tau_i^-)} K_\varepsilon \leq \frac{\frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}} + d_i^-}{\sigma} K_\varepsilon, \quad (35)$$

mivel L_σ -n $\sum_{j=0}^{\infty} C_j(\tau_i^-) \geq \sigma$ teljesül. Továbbá

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\varepsilon,\sigma,\delta}(\text{a } \tau_i^{(n)} \text{ időpontban fiktív törés történik}) \\ & \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sigma\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (36)$$



3. ábra. Összeolvadás: itt $\mathbf{C}(\tau_i)$ és $\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor)}{\sqrt{n}}$ valós hosszait látjuk, nem a $\frac{\sum_j C_j(\tau_i-)}{\sum_j C_j^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}}$ -nel módosítottakat. Ez esetben a C_2 darab ragad C_0 -hoz.



4. ábra. Törés: a 0-dik koordinátákból az X ill. X' darabok törtek le, melyeket az A ill. B' helyekre kell mozgatni.

ha n elég nagy. Összesen tehát

$$\mathbb{P}_{\varepsilon, \sigma, \delta}(\text{kellemetlen esemény az } i\text{-edik időpontban}) \leq \frac{K_\varepsilon}{\sigma} d_i^- + \frac{K_\varepsilon^2 + K_\varepsilon + 2}{\sigma \sqrt{n}}. \quad (37)$$

Ha U_i ugyanazt a darabját választja \mathbf{C} -nek és $\mathbf{C}^{(n)}$ -nek is, és ez nem a 0-dik koordináta, azaz mindkét helyen összeolvadás történik, akkor

$$d_i^+ \leq 3d_i^-, \quad (38)$$

hiszen ahogyan a 3. ábra is mutatja, a kiválasztott koordinátát először az első helyre kell mozgatni, utána következhet be az összeolvadás.

Ha a diszkrét és folytonos esetben is (nem fiktív) törés következik be, akkor $C_0(\tau_i)$ és $C_0^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor)/\sqrt{n}$ új aktív ciklushosszai (34) miatt csak legfeljebb $\frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -nel térhetnek el, ezért a $C_0(\tau_i-)$ -ből ill. a $C_0^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}$ -ből letört darabok hosszainak (a 4. ábrán X és X') különbsége is legfeljebb $d_i^- + \frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$.

Elképzelhető azonban, hogy a két darabot nem ugyanoda kell elhelyezni a megfelelő nagyság szerinti sorban. Ezt az esetet mutatja a 4. ábra. Ekkor első lépésben mozgassuk X -et és X' -t is a végleges helyeik közül a közelebbire (az ábrán A és A'). Mivel $|A - A'| \leq d_i^-$, az így kapott két vektor ($\mathbf{C}(\tau_i-)$

és $\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{n}\tau_i^{(n)} \rfloor - 1)/\sqrt{n}$ módosítottjai, de az egyik nem feltétlenül sorba rendezve!) $d(\cdot, \cdot)$ -távolsága legfeljebb $2d_i^- + \frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -re növekszik.

Második lépésben (az ábra jelöléseivel) X -et visszük el A -ból B -be. Az A és B közti szakaszok hosszaira igaz, hogy X -nél nem kisebbek és $X' + 2d_i^- \leq X + 3d_i^- + \frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -nél nem nagyobbak, vagyis közülük (X -et is beleértve) bármely kettőnek a hossza legfeljebb $3d_i^- + \frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -nel tér el. Ezért ha X -et egyenként cserélem ki mindig a jobb oldali szomszédjával, amíg B -be nem érek vele, akkor minden cserénél legfeljebb $3d_i^- + \frac{K_\varepsilon+1}{\sqrt{n}}$ -nel változik az osztópontok távolságának maximuma. Mivel a cserék száma K_ε -nal biztosan felülről korlátos,

$$d_i^+ \leq K_\varepsilon \left(3d_i^- + \frac{K_\varepsilon + 1}{\sqrt{n}} \right). \quad (39)$$

A fenti becslésekből az következik, hogy előre rögzített $\varepsilon, \sigma, \delta > 0$ esetén választhatjuk n -et olyan nagynak, hogy a véges sok ($\kappa = V_t \leq K_\varepsilon$ majdnem biztosan) növekedési pont után kialakult struktúrák $d\left(\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}, \mathbf{C}(t)\right) \leq d_\kappa^+ + \frac{1}{\sqrt{n}}$ távolsága ((38) és (39) miatt) tetszőlegesen kis korlát alatt marad, hiszen minden lépésben legfeljebb konstansszorosára ill. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ többszörösével növekedett. Továbbá összegezve minden lépésre a kellemetlen események valószínűségeit (37) alapján elég nagy n -et választva az összeg kellően kicsiny marad.

A 2. tételben az egyenletes konvergenciára vonatkozó állítás abból következik, hogy a bizonyításban végig a $\mathbf{C}(t)$ és $\frac{\mathbf{C}^{(n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}}$ vektorok távolságának T -ig bekövetkező növekedésére mutattunk olyan felső korlátot, amely 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel kicsi, ezért a felső becslés minden $t \in [0, T]$ esetén érvényes. Ezzel a bizonyítás teljes.

5. Általánosítás

A feladat általánosítása, ha a $V^{(n)}$ halmazban nem 1, hanem k pontot jelölünk ki,⁷ mindegyikhez hozzárendelünk egy-egy véletlen $(T_{i,j}^{(n)})_{i=1}^\infty$ $j = 1, \dots, k$ transzpozíciósorozatot egymástól függetlenül úgy, hogy a $T_{i,j}^{(n)}$ transzpozíciót a j -edik megjelölt elemet mozgató transzpozíciók és az identikus permutáció közül választjuk egyenletes eloszlással. Ezeket „párhuzamosan” alkalmazzuk, vagyis a kijelölt pontokon ciklikusan haladva mindig egy-egy új transzpozícióját alkalmazzuk a soron következő pontnak.

⁷ $V^{(n)} = \{1, \dots, k, k+1, \dots, n\}$, ahol $1, \dots, k$ a megjelölt elemek.

12. definíció. *Legyen*

$$P_i^{(k,n)} := T_{i,k}^{(n)} \circ T_{i,k-1}^{(n)} \circ \dots \circ T_{i,1}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots$$

Ennek segítségével a k keverővel generált véletlen permutáció legyen

$$\pi^{(k,n)}(t) := P_t^{(k,n)} \circ P_{t-1}^{(k,n)} \circ \dots \circ P_1^{(k,n)}. \quad (40)$$

A $(\pi^{(k,n)}(t))_{t=0}^\infty$ permutáció diszkrét idejű fejlődése nagyban hasonlít a $(\pi^{(n)}(t))_{t=0}^\infty$ által meghatározott dinamikára addig, amíg a különböző keverők által választott elemek különbözőek. Előfordulhat azonban, hogy valamelyik keverő olyan elemet választ, ami már szerepel valamelyik másik keverő aktív ciklusában. Ekkor a két keverő ciklusa összekapcsolódik, és kétszeres sebességgel növekszik. Sőt általában több keverő is egyetlen ciklusba kapcsolódhat (valamilyen ciklikus sorrendben), amely már a keverők számával arányos sebességgel növekszik. Ez a keverők halmazán egy $\Pi^{(k,n)}(t)$ permutációt indukál, melyet a ciklusfelbontása alapján tudunk meghatározni.⁸ Továbbá minden keverőhöz hozzá lehet rendelni a saját *aktív ciklusrészének* hosszát, vagyis azon elemek számát, amelyek a $\pi^{(k,n)}(t)$ permutáció megfelelő ciklusában közte és a körben következő keverő között helyezkednek el (őt magát is beleértve). A folyamat leírására tehát a következő állapottér tűnik alkalmasnak:

13. definíció.

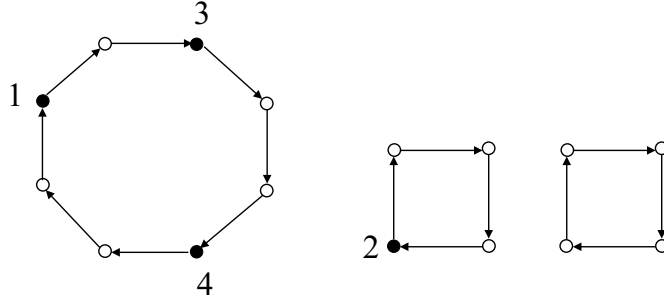
$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k)} := \{ & (\Pi, (a_1, \dots, a_k), (s_1, s_2, \dots)) : \Pi \in \text{Perm}(\{1, \dots, k\}), \\ & a_i \in \mathbb{R}, \quad a_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, k, \quad s_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2, \dots, \\ & s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0 \text{ és } s_i > 0 \text{ csak véges sok } i\text{-re} \}. \end{aligned} \quad (41)$$

Megjegyzés: Ha $A = (\Pi_1, (a_1, \dots, a_k), (s_1, s_2, \dots))$ és $B = (\Pi_2, (b_1, \dots, b_k), (t_1, t_2, \dots))$ két $\mathbf{S}^{(k)}$ -beli elem és $\Pi_1 = \Pi_2$, akkor $d(A, B)$ -t a 2. definícióhoz hasonlóan értelmezhetjük, ha $\Pi_1 \neq \Pi_2$, akkor legyen $d(A, B) = \infty$. Ezzel az $\mathbf{S}^{(k)}$ téren eltérést definiáltunk.

14. definíció. *Legyen*

$$\mathbf{C}^{(k,n)}(t) := (\Pi^{(k,n)}(t), (A_1^{(k,n)}(t), \dots, A_k^{(k,n)}(t)), (C_1^{(k,n)}(t), C_2^{(k,n)}(t), \dots)) \in \mathbf{S}^{(k)}, \quad (42)$$

ahol $\Pi^{(k,n)}(t)$ a keverők által indukált permutáció, $A_i^{(k,n)}(t)$ az i -edik keverő aktív ciklusrésze $i = 1, \dots, k$, a $C_1^{(k,n)}(t) \geq C_2^{(k,n)}(t) \geq \dots$ számok pedig a nem aktív ciklusok hosszai nemnövekvő sorrendben.⁹



5. ábra. Ehhez a permutációhoz a $\mathbf{C}^{(4,16)} = (\Pi^{(4,16)} = ((1, 3, 4), (2)), (A_1^{(4,16)} = 2, A_2^{(4,16)} = 4, A_3 = 3, A_4^{(4,16)} = 3), (4, 0, 0, \dots))$ vektort rendeljük. Itt csak a keverőket számoztam.

15. definíció. Jelölje $(B_i^{(k,n)}(t))_{t=0}^\infty$ az i -edik keverő mozgását $i = 1, \dots, k$, ekkor (4)-hez hasonlóan legyen

$$V_i^{(k,n)}(t) := \#\{s \leq t : \exists z < s, \exists 1 \leq j \leq k : B_j^{(k,n)}(z) = B_i^{(k,n)}(s)\} + \mathbb{1} \left(\exists 1 \leq j < i : B_j^{(k,n)}(t) = B_i^{(k,n)}(t) \right) \quad (43)$$

az i -edik keverő t -ig bekövetkezett „visszalépések” száma, vagyis hogy hányszor lépett olyan helyre, ahol már járt (esetleg másik) keverő. Az összes visszalépések számára pedig legyen

$$V^{(k,n)}(t) := \sum_{i=1}^k V_i^{(k,n)}(t) \quad (44)$$

3. tétel. Ha $(V_i^{(k)}(t))_{t \geq 0}$ független kt sűrűségű inhomogén Poisson pontfolyamatok $i = 1, 2, \dots$, akkor

$$V_i^{(k,n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor) \xrightarrow{d} V_i^{(k)}(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad i = 1, \dots, k \quad (45)$$

a véges dimenziós marginális eloszlások értelmében.

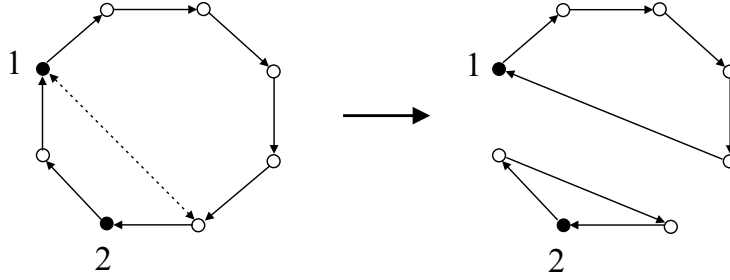
A bizonyítás hasonló számolás alapján adódik, mint amilyen (10) és (11).

16. definíció. Legyen

$$\mathbf{C}^{(k)}(t) = (\Pi^{(k)}(t), (A_1^{(k)}(t), \dots, A_k^{(k)}(t)), (C_1^{(k)}(t), C_2^{(k)}(t), \dots)) \in \mathbf{S}^{(k)}$$

a következő folytonos idejű sztochasztikus folyamat:

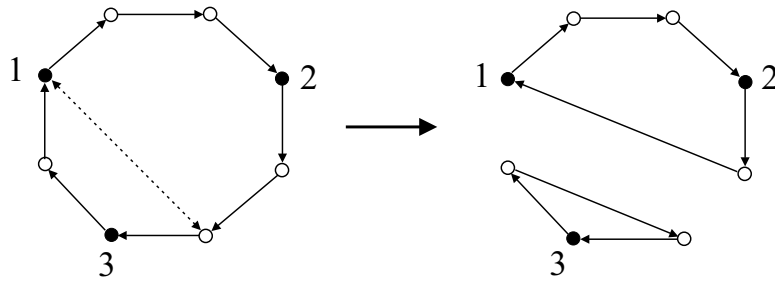
⁸ $\Pi^{(k,n)}(t)$ ciklusainak irányítása legyen a $\pi^{(k,n)}(t)$ ciklusai által indukált irányítás.
⁹Pontosabban itt is azokat az (esetleg egyelemű) ciklusokat kell venni, amelyeknek tagjait már mozgatták a $(T_{i,j}^{(n)})_{i=1}^t$ transzpozíciók valamely j -re.



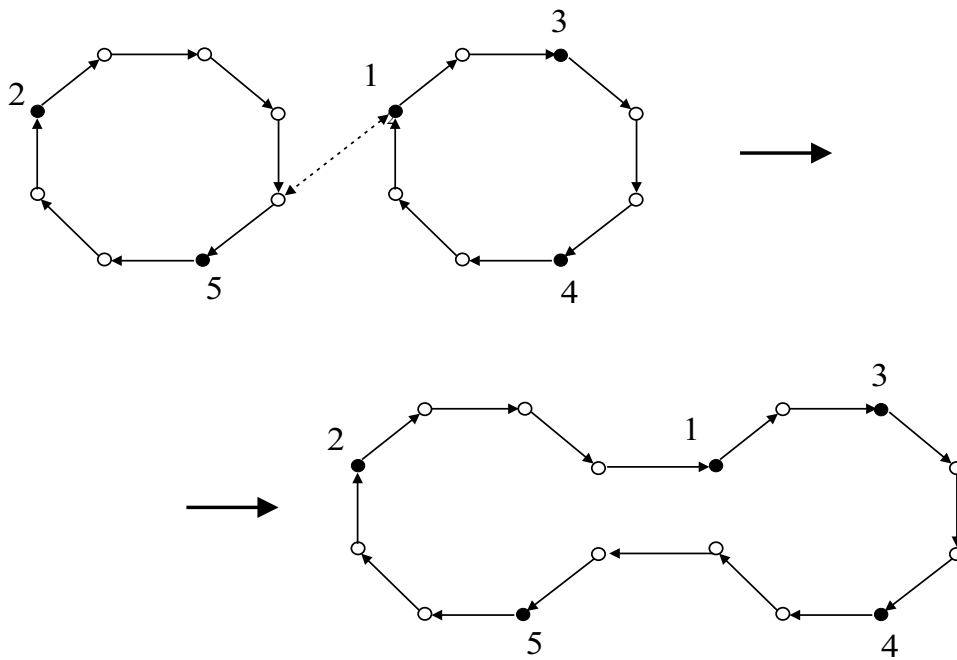
6. ábra. Az 1 keverő fixpontként kiválik Π -beli ciklusából

- Az $A_i^{(k)}(t)$ koordináták lineárisan növekednek $i=1, \dots, k$.
- A $V_i^{(k)}(t)$ inhomogén kt sűrűségű Poisson-folyamat τ növekedési pontjában a következők valamelyike történik. Az eddigiektől teljesen függetlenül az $A_1^{(k)}(\tau-), \dots, A_k^{(k)}(\tau-)$ és $C_1^{(k)}(\tau-), C_2^{(k)}(\tau-), \dots$ számok arányában kiválasztjuk az A_j vagy a C_l koordinátát.
 1. Ha valamelyik C_l -et választottuk, akkor az egy keverő esetével megegyező módon $C_l(\tau-)$ $A_i(\tau-)$ -hoz ragad, a többi koordináta a sorrend helyreállításán kívül nem változik.
 2. Ha valamelyik A_j -t választottuk, és $j = i$, mely $\Pi^{(k)}(\tau-)$ -nak fixpontja volt, akkor $A_j^{(k)}(\tau-)$ egy egyenletesen választott darabja a $C^{(k)}$ -k közé kerül (rendezve); egyébként i fixpontként kiválik $\Pi^{(k)}(\tau-)$ -beli ciklusából, és $A_j^{(k)}(\tau-)$ egyenletesen letört darabját a ciklusban az i -t megelőző eleme „örökli” (lásd a 6. ábrát).
 3. Ha valamelyik A_j -t választottuk, de $j \neq i$, és ezek $\Pi^{(k)}(\tau-)$ -nak ugyanazon ciklusában vannak, akkor a ciklus kettébomlik: az i -től j -ig terjedő ívre (i -t és j -t is beleértve), és a maradék ívre, továbbá a $\Pi^{(k)}(\tau-)$ megfelelő ciklusában az i -t megelőző elem megkapja az $A_j^{(k)}(\tau-)$ egy egyenletesen választott darabját (lásd a 7. ábrát).
 4. Ha valamelyik A_j -t választottuk, de $j \neq i$ és $\Pi^{(k)}(\tau-)$ -nak különböző ciklusában vannak, akkor a két ciklus összeragad: az i előtt és j után felbontott ciklusokat kell egymás után fűzni. Ezenkívül az $A_j^{(k)}(\tau-)$ egyenletesen letört darabját a $\Pi^{(k)}(\tau-)$ megfelelő ciklusának i -t megelőző eleméhez rendelt aktív ciklusrészhez adódik (lásd a 8. ábrát).

A bizonyítás megfelelő értelemszerű módosításával igaz a következő



7. ábra. Az 1 keverő Π -beli ciklusa kettéválk



8. ábra. Az 1 és 2 keverők Π -beli ciklusa egyesül

4. tétel. *Létezik olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, amelyen egyszerre megvalósulnak a $(\mathbf{C}^{(k,n)}(t))_{t=0}^{\infty}$ $n = 1, 2, \dots$ diszkrét és a $(\mathbf{C}^{(k)}(t))_{t \geq 0}$ folytonos idejű folyamatok úgy, hogy*

$$\frac{\mathbf{C}^{(k,n)}(\lfloor \sqrt{nt} \rfloor)}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathbf{C}^{(k)}(t) \quad \mathbb{P}\text{-majdnem biztosan} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (46)$$

a megfelelő távolság értelmében bármely véges $[0, T]$ intervallumon egyenletesen.

6. Nyitott kérdések

A dolgozatban vizsgált modell számos lehetőséget nyújt további kérdések feltevésére, új problémák megfogalmazására. Ezek közül az következők tűnnek a legérdekesebbnek.

Az 5. fejezetben tárgyalt több keverős modell tovább általánosítható: a megjelölt elemek száma a különböző méretű modellekben függhet a modell méretétől. A $V^{(n)}$ halmazon tekinthetjük tehát a $k(n)$ keverő által generált permutációt, ahol legegyszerűbb esetben $k(n) = n^\alpha$ választható valamilyen $0 < \alpha < 1$ mellett, de más keverőszámok is érdekesnek bizonyulhatnak, amelyek a $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$ feltételnek eleget tesznek.

Egy másik lehetséges kérdés a Markov-láncok esetén természetesen felmerülő probléma, a stacionárius eloszlás meghatározása. Ez egyben lehetőséget ad a nagy számú lépés megtétele után várható viselkedés leírására, továbbá annak megállapítására, hogy a hosszú ideig futtatott folyamat során kialakult permutáció mikor tekinthető (sőt egyáltalán tekinthető-e) egyenletesen választott véletlen permutációnak. A feladat megoldása ebben az egyszerűen leírható modellben egyáltalán nem nyilvánvaló.

Hasonló kérdésekkel is foglalkozik *Jim Pitman Combinatorial Stochastic Processes* [5] c. jegyzete, itt olvasható valamivel általánosabb formában az alábbi

17. definíció. *Legyen $\theta > 0$, a W_1, W_2, \dots valószínűségi változók független $\text{beta}(1, \theta)$ eloszlásúak. A $\overline{W}_i := 1 - W_i$ jelöléssel a*

$$(P_1, P_2, \dots) := (W_1, \overline{W}_1 W_2, \overline{W}_1 \overline{W}_2 W_3, \dots)$$

valószínűségi változók nagyság szerint csökkenő sorrendbe állított (Q_1, Q_2, \dots) sorozatának eloszlása θ paraméterű Poisson-Dirichlet eloszlás, rövidítve $PD(\theta)$.

Az egy keverő által generált modellben természetes módon sejthető a következő a stacionárius eloszlás a határfolyamatban: legyen (Q_1, Q_2, \dots)

$PD(1)$ eloszlású vektor, U pedig tőle független $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású változó. (Q_1, Q_2, \dots) tekinthető a $[0, 1]$ intervallum egy partíciójának, melynek osztópontjai a $\sum_{j=1}^i Q_j$ $i = 0, 1, \dots$ pontok. Ekkor a keverő ciklusának megfelelő részt a partícióban az U változó jelöli ki, a többi ciklus részarányát pedig a fennmaradó Q_i -k adják.

Hivatkozások

- [1] Omer Angel: Random infinite permutations and the cyclic time random walk. In C. Banderier and C. Krattenthaler, editors, *Random Walks and Discrete Potential Theory*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pages 9-16, 2003.
<http://dmtcs.loria.fr/proceedings/html/dmAC0101.abs.html>
- [2] Pál Erdős: Some remarks on the theory of graphs. (1947)
Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 292-294.
- [3] Pál Erdős, Alfréd Rényi: On random graphs I. (1959)
Publ. Math. Debrecen **6**, 290-297.
- [4] Svante Janson, Tomasz Łuczak, Andrzej Ruciński: *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [5] Jim Pitman: Combinatorial Stochastic Processes. Technical Report no. 621 Dept. Statistics, U. C. Berkeley. Lecture notes for St. Flour course, pages 63-64, July 2002.
<http://stat.berkeley.edu/users/pitman/621.pdf>
- [6] Oded Schramm: Compositions of random transpositions. (2004)
To appear in *Israel J. Math.*
<http://arxiv.org/abs/math.PR/0404356>
- [7] V. E. Stepanov: The probability of connectedness of a random graph $\mathcal{G}_m(t)$. (1970)
Teor. Veroyatnost. i Primenen. **15**, 55-68 (Russian); English transl. *Theor. Probab. Appl.* **15**, 55-67.
- [8] Bálint Tóth: Improved lower bound on the thermodynamic pressure of the spin 1/2 Heisenberg ferromagnet. *Lett. Math. Phys.*, 28(1):75-84, 1993.