Függvények nagyságrendje

Algoritmuselmélet
1. gyakorlat

2013. február 15.

Def. Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor

i. $f = O(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $n \geq n_0$ esetén $|f(n)| \leq c|g(n)|$ teljesül.

ii. $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $n \geq n_0$ esetén $|f(n)| \geq c|g(n)|$ teljesül.

iii. $f = \Theta(g)$ jelöli azt a tényt, hogy $f = O(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül.

1. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) $x^2 + 4x + 17 = O(x^3)$, de $x^3 \neq O(x^2 + 4x + 17)$;

   (b) $2x^2 + x - 7 = \Theta(x^2)$;

   (c) $\log_a f(n) = \Theta(\log_2 f(n))$ $(f(n) > 0)$;

   (d) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$;

   (e) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$;

   (f) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow f^k(n) = O(g^k(n))$.

2. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

   (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$;

   (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?

   Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.

3. Tekintsük az $f_1(n) = 2009n!$ és $f_2(n) = 100(n-1)!$ függvényeket. Igaz-e, hogy
   a) $f_1 = O(f_2)$ b) $f_2 = O(f_1)$ c) $f_1 = \Omega(f_2)$ d) $f_2 = \Omega(f_1)$?

4. Igaz-e, hogy ha
   $$f(n) = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \log n^i \right\rceil,$$
   akkor a) $f(n) = O(n \log n)$; b) $f(n) = O(n^2 \log n)$?

5. Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = \frac{1}{100}n^2 \log n, \;\; f_2(n) = 10^{10}(\log n)^3 - 100 \log n, \;\; f_3(n) = 8^{\log n}$$

6. Adjunk O becslést a következő függvényekre.

   (a) $(n^2 + 8)(n + 1)$
   (b) $(n \log_2 n + n^2)(n^3 + 2)$
   (c) $(n^3 + n^2 \log_2 n)(\log_2 n + 1) + (17 \log_2 n + 19)(n^3 + 2)$
   (d) $(n! + 2^n)(n^3 + \log_2(n^2 + 1))$
   (e) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$
   (f) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n)$

7. Melyik az a legkisebb egész k, amelyre igaz, hogy az alábbi kifejezés $O(x^k)$?

   (a) $2x^2 + x^3 \log x$
   (b) $(x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$
   (c) $(x^3 + 5 \log x)/(x^4 + 1)$

8. Jelölje $L(n)$ egy algoritmus lépésszámának maximumát az n csúcsú gráfokon. Tudjuk, hogy ha n páros, akkor $L(n) = L(n/2) + 5$, ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor $L(n) = L(n-2) + 3$. Következik-e ebből, hogy $L(n) = O(n^2)$?

9. Mi lehet $T(n)$, ha $T(1) = 2$ és $n \geq 2$ esetén $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 1$?

10. Egy problémára két algoritmusunk van.
    Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 darab $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.
    A $\mathcal{B}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 3 lépéssel 4 darab $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.
    Az $n = 1$ esetben mindkét eljárás 1 lépést használ.
    Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre gyorsabb?