Minimális költségű feszítőfák

Algoritmuselmélet
11. gyakorlat

2013. május 3.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjukból fel vannak sorolva):
   $a\colon b(2), c(3)$; $b\colon a(2), d(2)$; $c\colon a(3), d(1)$; $d\colon b(2), c(1), e(2), f(4)$;
   $e\colon d(2), f(1), g(2)$; $f\colon d(4), e(1), g(2), h(1)$; $g\colon e(2), f(2), h(3)$; $h\colon f(1), g(3)$;
   Keressünk G-ben
   (a) Prim algoritmusával minimális költségű feszítőfát!
   (b) Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát!
   (c) Borůvka algoritmusával minimális költségű feszítőfát!

2. A $G = (V; E)$ összefüggő, irányítatlan súlyozott gráfban $|E| \leq |V| + 100$. Adjon $O(|V|)$ lépésszámú algoritmust egy minimális feszítőfa meghatározására!

3. Mátrixával adott egy G irányítatlan súlyozott gráf. Adott még a G-nek egy F minimális súlyú feszítőfája, és az F-nek egy f éle. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az f él súlyát meddig lehet úgy felemelni, hogy az F a gráf minimális feszítőfája maradjon.

4. Mátrixával adott egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

5. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G-ből a v_1 csúcs, valamint a v_1-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)

6. Egy téglalap alaprajzú irodát $k \times n$ egyforma kis négyzet alakú részre osztunk. Az építész berajzolta az összes lehetséges falat, ezzel egy $k \times n$ méretű négyzetrácsot kapott. A kis négyzeteket határoló falak egy részét ki akarjuk hagyni oly módon, hogy a bal alsó sarokban levő négyzetből indulva mindenhova el tudjunk jutni. Adott minden falra, hogy annak kihagyása mennyi költséggel jár. Adjon $O(k^2n^2)$ lépésszámú algoritmust, amivel meghatározhatjuk, hogy mely falakat hagyjuk ki ha a célunk a költség minimalizálása.

7. Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c : E \to \{-1, 1\}$. Adjon algoritmust, ami G-ben $O(|V| + |E|)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő.

8. Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf, amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjon $O(|V| \cdot |E|)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.

9. Hány éle van az n pontú egyszerű gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

10. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan, n csúcsú, e élű G gráf csupa különböző élsúllyal. Adjunk egy olyan $O(e)$ költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának legalább $\frac{2}{3}n$ élét előállítja! (Azaz egy olyan élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)