Algoritmusok bonyolultsága

Algoritmuselmélet
12. gyakorlat

2013. május 10.

Egy X eldöntési probléma és egy x bemenet esetén $x \in X$ jelöli, hogy az x bemenetre a válasz IGEN.
P: Azon problémák osztálya, melyeket polinom időben meg tudunk oldani.
NP: Azon problémák osztálya, melyekhez van olyan tanú, aminek a segítségével polinom időben le tudjuk ellenőrizni, hogy a válasz igenlő.
co-NP: Azon problémák osztálya, melyekhez van olyan tanú, aminek a segítségével polinom időben le tudjuk ellenőrizni, hogy a válasz nemleges.
NP-nehéz: Azon problémák osztálya, melyekre minden NP-beli probléma polinom időben visszavezethető.
NP-teljes: Azon problémák osztálya, melyek NP-beliek és NP-nehezek.
Karp-redukció: Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bementéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy $x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y$.
Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-ra.
Tulajdonságai:

i. Ha $X \prec Y$ és $Y \in$ P, akkor $X \in$ P.

ii. Ha $X \prec Y$ és $Y \in$ NP, akkor $X \in$ NP.

iii. Ha $X \prec Y$, akkor $\overline{X} \prec \overline{Y}$.

iv. Ha $X \prec Y$ és $Y \in$ coNP, akkor $X \in$ coNP.

v. Ha $X \prec Y$ és $Y \in \text{NP} \cap \text{coNP}$, akkor $X \in \text{NP} \cap \text{coNP}$.

vi. Ha $X \prec Y$ és $Y \prec Z$, akkor $X \prec Z$.

Tétel. Ha az X eldöntési probléma NP-teljes, $Y \in$ NP és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.
NP-teljes problémák: 3SZÍN, MAXFTLEN, MAXKLIKK, RÉSZGRÁFIZO, H, H-ÚT, HÁT, RH, PARTÍCIÓ.

1. Bizonyítsd be az alábbi eldöntési problémákról, hogy NP-beliek. Melyekről tudod belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látod, hogy coNP-beliek?

   (a) **Input:** G irányítatlan gráf
   Kérdés: G-ben van-e Euler-kör?

   (b) **Input:** (G, k) ahol G irányítatlan gráf, k pozitív egész
   Kérdés: G-ben van-e k darab független pont?

   (c) **Input:** G irányítatlan gráf
   Kérdés: Van-e G-ben legfeljebb 100 élből álló kör?

   (d) **Input:** G irányítatlan gráf
   Kérdés: Van-e G-ben legalább 100 élből álló kör?

   (e) **Input:** G irányítatlan gráf, $k > 0$ egész szám
   Kérdés: Van-e G-ben legalább k élből álló kör?

2. Tegyük fel, hogy van egy olyan P eljárásunk, ami egy input G gráfra és k pozitív egész számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz.

   (a) Adj polinomiális algoritmust, ami meghatározza a független pontok maximális számát.

   (b) Adj polinomiális algoritmust, ami meg is talál egy maximális méretű független ponthalmazt.

3. Tegyük fel, hogy van egy P programunk, amely egy n csúcsú G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy az kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezz olyan P-t használó algoritmust, amely polinom időben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán)!

4. Mutasd meg, hogy ha P=NP, akkor van olyan polinomiális algoritmus, ami egy adott szám prímtényezős felbontását adja meg!

5. Adj Karp-redukciót a 3SZÍN nyelvről a 4SZÍN nyelvre!

Mi a bonyolultsága az alábbi feladatoknak?

6. Bemenet: Egy G gráf
   Kérdés: Teljesül-e a G gráfra az Ore-feltétel?

7. Bemenet: Egy G gráf és $e \in E(G)$
   Kérdés: Van-e G-ben e-n átmenő kör?

8. Bemenet: Egy G gráf és $x, y \in V(G)$
   Kérdés: Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y színe különböző legyen?

9. Bemenet: Egy G gráf és $x, y \in V(G)$
   Kérdés: Kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y színe azonos legyen?

10. Bemenet: Egy G gráf és $S \subseteq V(G)$
    Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek elsőfokú pontjainak A halmazára $A \supseteq S$?