

P, NP
Algoritmuselmélet
2019. tavasz
7. gyakorlat

Definíció

Egy Turing-gépre azt mondjuk, hogy $f(n)$ időkorlátos, ha minden x bemeneten legfeljebb $f(|x|)$ lépést tesz.

Egy Turing gépre azt mondjuk, hogy polinom időkorlátos, ha $f(n)$ időkorlátos valamilyen $f(n)$ polinomra.

Definíció

A P azoknak a nyelveknek az osztálya, amelyekhez van polinom időkorlátos determinisztikus Turing-gép.

Az NP azoknak a nyelveknek az osztálya, amelyekhez van polinom időkorlátos nondeterminisztikus Turing-gép.

Tanú tétel

Egy L nyelv akkor és csak akkor NP-beli, ha található olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és olyan $L_1 \in P$ nyelv, amelyekre

$$L = \{x : \text{létezik olyan } y, \text{ amelyre } |y| \leq c_1|x|^{c_2} \text{ és } (x, y) \in L_1\}.$$

1. Egy M determinisztikus Turing-gép tetszőleges n hosszú inputon legfeljebb $(n^{100} + 8^{\log_2 n})n^2$ lépést tesz. Bizonyítsuk be, hogy $L(M) \in NP$.
2. Legyen CYC5 az azon (súlyozatlan) gráfokat leíró szavak nyelve, melyekben a legrövidebb kör hossza pontosan 5. Bizonyítsuk be, hogy a CYC5 nyelv NP-beli.
3. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, irányított gráf, melyben az e él hosszát $l(e)$, a költségét $c(e)$ jelöli. Minden élre mindkét érték nemnegatív. Tekintsük azon (G, s, t, h, k) alakú szavak L nyelvét, melyekben $s, t \in V(G)$ és van olyan út s és t között, melynek összhossza legfeljebb h , valamint összköltsége legfeljebb k . Bizonyítsa be, hogy $L \in NP$.
4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi nyelvek P-beliek.
 - (a) Azon irányítatlan gráfok nyelve, melyekben nincs kör.
 - (b) Azon irányítatlan gráfok nyelve, melyekben nincs páratlan hosszú kör.
 - (c) Azon irányított gráfok nyelve, melyekben nincs irányított kör.

- (d) Az olyan (G, s, t) hármaskból álló nyelv, ahol G egy irányított gráf, s és t a gráf két csúcsa és G -ben van út s -ből t -be.
 - (e) Az olyan (G, e) párokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, e a gráf egy éle és G -ben van e -n átmenő kör.
 - (f) Az olyan (n, m) párokból álló nyelv, amelyekben n és m egymáshoz relatív prím, pozitív egész számok.
 - (g) Azon irányítatlan gráfok nyelve, amelyekben van legfeljebb 100 élből álló kör.
 - (h) Az olyan (G, k) párokból álló nyelv, ahol a G irányítatlan gráfban van legfeljebb k élből álló kör.
 - (i) Az $5\text{KLIKK} = \{G : \text{a } G \text{ irányítatlan gráfban van } 5 \text{ pontú klikk}\}$ nyelv.
5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi nyelvek NP-beliek.
- (a) Az olyan (G, H) párokból álló nyelv, ahol G és H egymással izomorf, irányítatlan gráfok.
 - (b) A $\text{MAXKLIKK} = \{(G, k) : \text{a } G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ pontú klikk}\}$ nyelv.
6. Igazoljuk, hogy az a nyelv, ami az összes olyan M determinisztikus véges automata leírásából áll, melyre $L(M) \neq \emptyset$ teljesül, NP-ben van.