

coNP, Karp-redukció

Algoritmuskutatás

2019. tavasz

8. gyakorlat

Definíció

A coNP azoknak a nyelveknek az osztálya, amelyeknek a komplementere NP-beli.

Karp-redukció

Legyen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ két nyelv. Azt mondjuk, hogy az L_1 nyelv Karp-redukálható (vagy polinomiálisan visszavezethető) az L_2 nyelvre, ha létezik olyan $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ polinom időben számolható függvény, melyre tetszőleges $x \in \Sigma^*$ szó esetén

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

teljesül. Jelölése $L_1 \leq L_2$.

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi nyelvek coNP-beliek.
 - (a) Az olyan páros gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.
 - (b) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.
 - (c) A síkbarajzolható gráfok nyelve.
 - (d) Azon gráfok nyelve, amelyekben akárhogyan színezzük ki az éleket 2 színnel, mindig keletkezik egyszínű háromszög.
 - (e) Az olyan (G, t) párokból álló nyelv, ahol G egy súlyozott, irányítatlan gráf, $t > 0$ egész, és G -ben minden, t darab élből álló párosítás súlya legalább t^2 .
 - (f) A prímszámok nyelve.
 - (g) A prímszámok nyelve.
2. Álljon az L nyelv azokból a pozitív egész N számokból, melyekre teljesül, hogy N bármely két osztójának különbsége legalább 20. Igazoljuk, hogy $L \in \text{coNP}$.
3. Legyen $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ olyan polinom időben kiszámolható, bijektív függvény, amelynél minden $x \in \{0, 1\}^*$ szóra teljesül, hogy $|f(x)| = |x|$.
Legyen

$$L = \{y \in \{0, 1\}^* : \text{van olyan } 1\text{-gyel kezdődő } x, \text{ amire } f(x) = y\}.$$

Igaz-e, hogy $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$?

4. Igazoljuk, hogy $2SZÍN \prec 3SZÍN$ és $3SZÍN \prec 100SZÍN$, ahol tetszőleges $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén $kSZÍN$ jelöli a k színnel színezhető gráfok nyelvét.
5. Jelölje S-T-HAMÚT az olyan (G, s, t) hármaskból álló nyelvet, ahol a G irányítatlan gráf s és t csúcsa között van Hamilton-út. Igazoljuk, hogy az alábbi nyelvekre az S-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!
 - (a) HAMÚT, azaz a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve;
 - (b) HAM, azaz a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve.
6. Adjunk meg egy $HAM \prec$ S-T-HAMÚT Karp-redukciót!
7. Adjunk meg egy $HAM \prec$ HAMÚT Karp-redukciót!
8. Adjunk meg egy $HAMÚT \prec$ HAM Karp-redukciót!